Exercices de révision

Tous les exercices présentés sont du niveau terminal et donc doivent être résolus sans grande difficulté pour aborder un L1 sans problème. Bien entendu ils supposent que le cours a été appris et surtout compris. Les énoncés et devront être lus attentivement

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Congruences :

1) Montrez que si a et b sont deux entiers non divisibles par3, $a^2 - b^2$ est divisible par 3

2)Montrez que si a et b sont deux entiers non mutiples de 7 alors a^2+b^2 n'est pas multiple de 7

3) Montrez que poour tout entier positif n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Quel est le reste de la division par 8 de 19^{52}?

5) 5-1 :Pour tout entier positif, n, on note par u le chiffre des unités et par d celui des dizaines. Montrez que pour que n soit divisible par 4 il faut et il suffit que u+2d soit divisible par 4
5-2 Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier 3x82y soit divisible à la fois par 4 et 9
5-3 Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier 3x82y soit divisible à la fois par 3 et 11 Attention on peut avoir plusieurs solutions

6) Montrez que si k est un entier positif $10^k - 1$ est divisible par 7 si et seulement si k est multiple de 6

Nombres premiers et P.G.C.D, P.P.C.M
Les trois premiers exercices ont plusieurs solutions

1) Trouver deux entiers sachant que leur somme est 360 et leur p.g.c.d et 16.

2) Trouver deux entiers sachant que leur produit est 2700 et leur p.g.c.d est 26

3) Le p.g.c.d de deux entiers est 32 et le plus grand des deux entiers est 288. Quel est l'autre ?

4) m et n sont deux entiers. Quel est le p.g.c.d de mn et (2m+1)n ?

5) On considére dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4x - 3y = 5$. Sachant que x=2 et y=1 est une solution particulière trouvez toutes les autres solutions.

5) Montrez que le produit de trois nombres pairs consécutifs est divisible par 48

6) Soit N= cdu un entier de trois chiffres. Trouver N sachant que
a) 3c+d+u=ud+9
b) cdu=cud+27
c) La différence cdu-ucd est divisible par 7

7) Trouvez deux entiers connaissant leur p.g.c.d ,6 et leur p.p.c.m ,240

8) Quel est le p.p.c.m de n,n+1 et n(n+2)

9) Le nombre d'éléves de la classe est inférieur à 40. Si on les range par files de 12 ou 9 il en reste un à chaque fois. Trouvez le nombre d'éléves.

10) Trouver le plus petit entier par lequel il faut multiplier 240 pour que le produit soit un carré parfait

11) Trouver un entier N de quatre chiffres terminé par 9, divisible par 147 et qui soit un carré parfait.

Etude de fonctions Limites, Continuité, Dérivées :

1) a) Calculer la somme de $A_n = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.
b)Calculer A_n pour x=1.

2)On enléve aux quatre coins d'une plaque carrée de coté a des carrés de coté x. On forme une boîte sans couvercle en relevant les rectangles latéraux. Calculer x pour que le volume de la boîte soit maximale.

3) a) Pour quelles valeurs de x la fonction $f(x) = \sqrt{4sin^2(x) - 3}(x \in [0, \pi])$ est-elle définie ?
b) Calculer alors sa dérivée

4)Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1+\sqrt{x^2+1}}$. Calculer $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

5) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2-1}{-x^2+2x}, \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x-1}{-x^2+2x}, \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^3-1}{-x^2+2x}$.

6)Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-2x^3+2x^2-2x+1}{x^3-x^2+4x-4}$

7) Soit f la fonction$f(x) = x + |x|$. Donner les équations des deux tangentes au graphe en 0

8) Soit les fonctions dérivables f et g tel que g(x)=f(x) + x. Si M et M' sont deux points de même abscisse, montres que les tangentes aux graphes dee f et g se coupent sur l'axe Oy

9)On suppose qu'on lance, dans le vide, d'un point O, un mobile pesant. On considère un repère orthonormé situé dans le plan vertical contenant le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{OV_0}$,l'axe Oy étant vertical ;
On admettra que la trajectoire se trouve dans le plan xOy et a pour équation $y = xtg(\alpha) - \dfrac{gx^2}{2v_0^2cos^2(\alpha)}$, α est l'angle de Ox avec le vecteur $\overrightarrow{OV_0}$
Calculer α pour que la portée OM, M étant le point de chute sur Ox, soit maximale.

10)

Analyse combinatoire progressions Coefficients du binôme

1) Combien y a t-il de nombres entre 1000 et 10 000 formés de chiffres tous différents ?

2)De combien de manières peut-on ranger 4 personnes autour d'une table ronde ? *ne pas répondre trop vite la bonne réponse est 4*

3))On distribue 5 cartes parmi 32. Combien y-a-t-il de jeux différents comportant deux tréfles et deux seulement ?

4)Quel est le nombre de diagonales d'un octogone ? On prolonge toutes ces droites indéfiniment ; quel est alors le nombe de triangles formés par ces droites ?

5)Soit (P) une progression arithmétique de 7 termes tous positifs dont le 4^{ieme} est égal à 3. Sachant que la sommme des puissances cinquiéme du premier et du septieme terme est 2 818,8 calculez les termes de (P)

6)Soit une progression arithmétique de premier terme 1 et de raison x.Calculer x si
a) la somme des termes est 176 et le dernier est 31
b) le rapport du 8^{ieme} terme au 3^{ieme} est 4
c) la différence des carrés des 10^{ieme} et 7^{ieme} terme vaut 3

7)
Déterminer les progressions arithmétiques de 5 termes dont la somme des termes est 25 et la somme de leurs carrés 165

Les complexes

1) Quels sont les racines carrés de z= 3 - 2i ?
On trouvera $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}}$
2) Domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z+1-8i}{z^2-(1+3i)-2+2i}$
On trouvera $\mathbb{C} - [2i, 1+i]$

3) Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 - 9$
a) Vérifier que P(3)=0
b) En déduire toutes les solutions de P(z)= 0.

4 Soit $z_1 = e^{i\pi/3}$ et $z_2 = e^{i\pi/4}$ En calculant $z_1 \times z_2$ calculer $\cos(7\pi/12)$ et $\sin(7\pi/12)$

5) Soient trois points A,B,C d'affices respectifs z_A, z_B, z_C. Montrez que les trois points sont alignés si et seulement si $arg\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 0 \mod \pi$ et que les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si et seulement si $arg\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \pi/2 \mod \pi$

.

Les complexes et la géométrie

Ces exercices sont du cours qu'il s'agit de retrouver par ses propres moyens. Dans toute la suite le plan est rapporté à un repère orthonormé.
1) Soit Ω un point du plan d'affixe ω. Si M est un point d'affixe z donner l'affixe z' du transformé de M par la rotation d'angle θ et de centre Ω.
On trouvera que $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

2)Soit Ω un point du plan d'affixe ω. Si M est un point d'affixe z donner l'affixe z' du transformé de M par l'hothétie de centre Ω de rapport λ

On trouvera que $z' = \lambda(z - \omega) + \omega$

3) Soient A d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, B d'affixe $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, C' d'affixe $z_{C'} = 2i$.

a) Calculer l'affixe du point C tel que C soit l'image de C' par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

b) Soit le triangle ABC. Quel est l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$? En déduire la nature du triangle ABC et donner le centre et le rayon du cercle circonscrit Γ

c) Soit ρ la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$. On note par A',B',C" les images de A,B,C par cette rotation. Calculer les affixes de ces trois points.

d) Quelle est l'image de Γ par ρ ? Quel est l'antécédent de Γ par ρ ?