$\boxed{\text{Quelques rappels généraux sur les espaces Euclidiens}}$

Un espace vectoriel Euclidien est un espace vectoriel E, muni d'un produit scalaire, que l'on notera $< ./. >$ donc d'une F.B.S (pour forme bilinéaire symétrique) telle que pour tout $x \neq 0$ de E $< x/x > 0$.

On dispose donc d'une norme définie par $\|x\| = \sqrt{< x/x >}$. Cette norme satisfaisant entre autre à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On a aussi la notion d'hortogonalité : Si F est sous espace vectoriel de E on note l'hortogonal de F par $F^{\perp} = \{x/ < x/y >= 0 \ \forall y \in F\}$. En particulier $E = F \oplus F^{\perp}$.

Tout ceci nous permettra donc, si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, de parler de base orthogonal si $<e_i/e_j >= 0$ pour $i \neq j$ et de base orthonormée si de plus $\|e_i\| = 1$ pour tout i $1 \leq i \leq n$.

Introduisons la notion de trnsformation **orthogonale** : On dira que le morphisme f de E dans E est orthogonal si $\forall u \|u\| = \|f(u)\|$. Dans une base **orthonormée** il est équivalent de dire que si A est la matrice de f satisfait à $A^t A = Id$. Comme tout morphisme orthogonal transforme une base orthonormée en une base orthonormée il est équivalent de vérifier que les vecteurs colonnes de A sont de norme 1 et que leurs produit scalaire, deux à deux, est nul.

On notera au passage que $det(A) = \pm 1$. Bien entendu ceci ne suffit pas pour cactériser une application orthogonale. On dira aussi que f est une isométrie vectorielle.

Un espace affine Euclidien, E, est un espace affine tel que $\overrightarrow{E}$ soit un espace vectoriel Euclidien.

On a donc une notion de distance si E est affine Euclidien en posant que la distance de deux points M et M' est $d(M, M^{'}) = \|\overrightarrow{MM^{'}}\|$.

Les isométries : Si f est une application affine de E dans E, f est une isométrie si $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. Il est équivalent de dire que f conserve les distances. c'est à dire que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Le but de ce fichier est d'étudier les isométries affines en dimension 2 et 3. On supposera connij la classification des isométries.

Isométries affines du plan

1. Préliminaires

Rappelons que toute isométrie affine f est le composé $t_{\overrightarrow{u}} \circ \overrightarrow{f}$ où $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle et $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les isométries vectorielles du plan sont les rotations (de déterminant 1) ou les réflexions (de déterminant -1).

Les isométries affines directes sont soit des rotations, soit des translations et les isométries affines indirectes sont soit des symétries orthogonales par rapport à une droite soit des glissements c'est à dire les composés $t_{\overrightarrow{v}} \circ s_D$ où s_D est une symétrie orthogonale par rapport à D et $t_{\overrightarrow{v}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ appartenant à la direction de D.

2. Composé d'isométries affines

Proposition 2.0.1. *Le composé de deux symétries, s_{D_1} et s_{D_2} est une translation si D_1 et D_2 sont parallèles et sinon une rotation. Le centre de la rotation étant le point d'intersection de D_1 et D_2*

Réciproquement toute rotation,r, est le composé de deux symétries par rapport à deux droites passant par le centre de rotation, dont l'une est arbitraire et l'autre déduite de la première par une rotation d'angle $\theta/2$. Plus précisément $r = s_D \circ s_{D'}$ où D est déduite de $D^{'}$ par une rotation d'angle $\theta/2$.

Proposition 2.0.2. *Le composé d'une symétrie et d'une translation $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D$ est soit si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à D une symétrie par rapport à une droite Δ parallèle à D soit un glissement $t_{\overrightarrow{v}} \circ s_{\Delta}$ où s_{Δ} est une symétrie orthogonale par rapport à Δ, droite parallèle à D.*

2.1. **Exercices.**

Exercice 1.

Le composé d'une rotation r, de centre C et d'angle θ, et d'une translation, $t_{\overrightarrow{u}}$, de vecteur $\overrightarrow{u}$, est une rotation. Donner une construction géométrique de son centre.

On suppose le plan muni d'un repère, $\mathcal{R}$= $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, orthonormé directe. Soit C un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère $\mathcal{R}$, r la rotation de centre C et d'angle $\pi/3$. Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$,donner dans le repère $\mathcal{R}$ les coordonnées du centre de la rotation $r \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Exercice 2.

Soit r_1 et r_2 deux rotations de centres C_1 et C_2 dont les angles θ_1 et θ_2 ne sont pas opposés (modulo 2π). Construire géométriquement le centre de la rotation $r_1 \circ r_2$.

Exercice 3.
On suppose le plan muni d'un repère, $\mathcal{R}$= $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, orthonormé directe.Soit C_1 un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère $\mathcal{R}$. Soit r_1 la rotation de centre C_1 et d'angle $\pi/4$. Si C_2 est le point $C_1 + 2\overrightarrow{i}$ et r_2 la rotation de centre C_2 et d'angle $-\pi/4$ décrire la transformation $r_1 \circ r_2$.

2.2. **Corrigé succint des exercices de la section 2-1.**

Exercice 4.

1) Construction géométrique du centre :

Soit D une droite passant par le centre de la rotation r. On a $t_{\overrightarrow{u}} = s_D \circ s_{D_2}$ où D_2 est la droite déduite de D par la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}/2$. La rotation $r = s_{D_1} \circ s_D$ où D_1 est la droite déduite de D par la rotation d'angle $\theta/2$. Donc $r \circ t_{\overrightarrow{u}} = s_{D_1} \circ s_{D_2}$ soit une rotation de centre le point d'intersection de D_1 et D_2.

2) Application numérique :

Donnons une solution analytique. Dans le repère $\mathcal{R}$= $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, un point M de coordonnées (x,y) est transformé par $r \circ t_{\overrightarrow{u}}$ en le point M' de coordonnées (x', y') telles que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2 - x_0 \\ y + 3 - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Le centre est donc donné par le point fixe, solution d'un systéme inéaire de deux équation à deux inconnues.

On peut aussi se baser sur la construction géométrique du centre de la rotation en prenant par exemple,(vu les notations de 1), pour droite D la droite d'équation $y = x + y_0 - x_0$ dans le repère $\mathcal{R}$ et de calculer les équations des drotes D_1 et D_2. (Les détails sont laissés au lecteur).

Exercice 5.

On opére comme pour l'exercice précédent, en décomposant $r_1 \circ r_2$ en $s_{D_1} \circ s_D \circ s_D \circ s_{D_2}$ où D est la droite passant par les centres C_1 et C_2. Les deux droites D_1 etD_2 étant déduites de D par les rotations respectives d'angle $\theta_1/2$ et $-\theta_2/2$. Comme les angles ne sont pas opposés (modulo 2π) les deux droites D_1 et D_2 sont concourantes et leur point d'intersection est le centre de la rotation $r_1 \circ r_2$

Exercice 6.
On opére comme pour l'exercice précédent, en décomposant $r_1 \circ r_2$ en $s_{D_1} \circ s_D \circ s_D \circ s_{D_2}$ où D est la droite passant par les centres C_1 et C_2. Les deux droites D_1 etD_2 étant déduites de D par les rotations respectives d'angle $\theta_1/2$ et $-\theta_2/2$. Comme les angles sont opposés (modulo 2π) les deux droites D_1 et D_2 sont paralléles. Et par suite $r_1 \circ r_2$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Pour calculer le vecteur $\overrightarrow{u}$, on peut calculer les coordonnées de $r_1 \circ r_2(C_2) = C_2'$ dans le repère $\mathcal{R}$(utiliser le méthode analytique de l'exercice 2.1.1) et le vecteur $\overrightarrow{u}$ sera $\overrightarrow{C_2C_2'}$.

3. Etude d'une isométrie f donnée par son expression analytique

3.1. **Méthode générale.** Dans tout ce qui suit on suppose que f est donnée par son expression analytique dans unrepére orthonormé directe.

Soit f une isométrie affine du plan. f est donc donné par une expression du type $t_{\overrightarrow{u}} \circ \overrightarrow{f}$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle du plan, donc la matrice M de $\overrightarrow{f}$,dans le repére $\mathcal{R}$ orthonormée directe, est orthogonal

ETUDE DE $\overrightarrow{f}$:
Si det(M) =1 $\overrightarrow{f}$ est une rotation de centre O et d'angle θ connu par son cosinus et son sinus puisque $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
Si det(M) = -1 $\overrightarrow{f}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$.
ETUDE DE f :
Si $\overrightarrow{f}$ est une rotation de centre O et d'angle θ alors f est une rotation de centre A et d'angle θ.
Le centre de cette rotation affine est donc le point fixe de f.
Si $\overrightarrow{f}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ alors f est soit une réflexion d'axe D de direction $\overrightarrow{D}$ si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{D}$
soit un glissement donc le composé $t_{\overrightarrow{v}} \circ s_D$ où s_D est une réflexion d'axe D de direction $\overrightarrow{D}$ et $t_{\overrightarrow{v}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ appartient à $\overrightarrow{D}$.
Supposons que $det(M)$ = -1.
On détermine $\overrightarrow{D}$ par l'ensemble des points fixes de $\overrightarrow{f}$.
Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{D}$ on a donc une réflexion dont l'axe est l'ensemble des points fixes de f sinon on a un glissement.

<u>Détermination de l'axe du glissement D</u> :

Première méthode :
L'équation de $\overrightarrow{D}$ est du type $ax + by = 0$ où a et b sont connus. L'équation de D est donc du type $ax + by + c = 0$. Cette axe est globalement invariant par f Donc si A de coordonnées (x, y)est un point de D donc $ax+by+c = 0$ alors $aX+bY+c = 0$ si (X, Y) sont les coordonnées de $f(A)$ ce qui permet de déterminer c.

Deuxième méthode :
Pour tout point A du plan le milieu du segment $[A, f(A)]$ appartient à D (théoréme des milieux) donc il suffit de prendre un point du plan et d'écrire que le milieu du segment appartient à D. Pour simplifier les calculs on peut prendre A = (0,0). (Ceci suppose que le point A n'appartient pas à D, si tel était le cas on aurait D $=\overrightarrow{D}$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ serait parallélle à D donc le vecteur $\overrightarrow{v}$).

<u>Détermination du vecteur de translation $\overrightarrow{v}$</u> :
On prend un point A de D et donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{Af(A)}$

3.2. **Exercices.**

Exercice 7. Dans le plan rapporté à un repére orthonormé directe, on considère l'application f donnée par
$f(x, y) = (\frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) - 1, \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) + \sqrt{3})$. Donner la nature géométrique de f et ses éléments caractéristiques

Exercice 8. Dans le plan rapporté à un repére orthonormé directe, on considère l'application f donnée par

$f(x,y) = (-\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}y)+\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}x+y)+1)$. Donner la nature géométrique de f et ses éléments caractéristiques .

Exercice 9. Dans le plan rapporté à un repére orthonormé directe, on considère l'application f donné par

$f(x,y) = (-\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}y), \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}x+y)+4)$. Montrer que f est un glissement et donner les éléments caractéristiques de f.

3.3. **Corrigé succint des exercices de la section 3-2.**

Exercice 10. $f(x,y) = (\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{3}y)-1, \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)+\sqrt{3})$.

On vérifie aisément que la matrice M de $\overrightarrow{f}$ est la matrice d'une rotation d'angle $\pi/3$ et donc que f est une rotation, de centre le point fixe, et d'angle $\pi/3$. On trouvera que le centre est le point de coordonnées (x = 2, y = 0).

Exercice 11. $f(x,y) = (-\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}y)+\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}x+y)+1)$.

On vérifie aisément que la matrice M de $\overrightarrow{f}$ est la matrice d'une symétrie par rapport à une droite $\overrightarrow{D}$, dont l'équation est donnée par l'ensemble des points fixes de $\overrightarrow{f}$. On trouvera donc$\sqrt{3}x+y=0$.

Comme le vecteur de translation a pour coordonnées $(\sqrt{3},1)$, il est orthogonal à $\overrightarrow{D}$ et par suite f est une symétrie par rapport à une droite D, ensemble des points fixes de f. Cette droite a donc pour équation $\sqrt{3}x+y-2=0$.

Exercice 12. $f(x,y) = (-\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}y), \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}x+y)+4)$.

On vérifie aisément que la matrice M de $\overrightarrow{f}$ est la matrice d'une symétrie par rapport à une droite $\overrightarrow{D}$, dont l'équation est donnée par l'ensemble des points fixes de $\overrightarrow{f}$. On trouvera donc$\sqrt{3}x+y=0$. (cf l'exercice précédent)

Cette fois le vecteur de translation, qui a pour coordonnées $(0,4)$, n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{D}$ et donc f est un glissement,d'axe D et de vecteur de translation $\overrightarrow{v}$.

Détermination de l'axe :

Utilisons les deux méthodes proposées.

Première méthode :

L'équation de D est de la forme $\sqrt{3}x+y+c=0$ (1). Donc si A est un point de coordonnées (x,y) vérifiant$\sqrt{3}x+y+c=0$, le point $f(A)$ de coordonnées $(-\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}y), \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}x+y)+4)$ vérifie la même équation. Par suite $\sqrt{3}(-\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}y))+\dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}x+y)+4+c=0$ ce qui compte tenu de (1) donne $c=-2$.

Deuxiéme méthode :

Soit A le point de coordonnées (0,0) alors le milieu du segment $[A, f(A)]$ est le point de coordonnées $(0,2)$ qui appartient à D donc 2 + c = 0.

Isométries affines de l'espace

4. PRÉLIMINAIRES

Soit f une isométrie de l'espace.

La classificaton des isométries de l'espace est supposée connue.

On se propose d'examiner les méthodes pour trouver les éléments caractéristiques de cette transformation. f se présente donc par son expression analytique dans une base orthonormale. f étant affine est donc sous la forme $t_{\overrightarrow{u}} \circ \overrightarrow{f}$ où $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

NOTATION :

$r(\Delta, \theta)$ désignera la rotation d'axe Δ et d'angle θ.

s_P désignera la symétrie orthogonale par rapport au plan P.

$t_{\overrightarrow{u}}$ désignera la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

5. Étude de l'isométrie vectorielle

1) On vérifie que la matrice M de $\overrightarrow{f}$ est orthogonale et donc que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

2) On calcule le déterminant de M, det(M) qui sera 1 ou -1.

Si **detM) = 1** alors $\overrightarrow{f}$ est une rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et d'angle θ.

On a $2\cos\theta + 1 =$ trace (M) et $\overrightarrow{\Delta}$ est donné par l'ensemble des points invariants.

Pour déterminer le vecteur $\overrightarrow{v}$,vecteur directeur de $\overrightarrow{\Delta}$, comme $\overrightarrow{\Delta}$ est donné par l'intersection de deux plans, il suffit de former le produit vectoriel des vecteurs normaux à ces deux plans.

Le signe de θ est donné par le signe du déterminant $|\overrightarrow{n}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{n}), \overrightarrow{v}|$ où $\overrightarrow{n}$est un vecteur normal à $\overrightarrow{\Delta}$.

Si **det(M) = -1** alors $\overrightarrow{f}$ est la composée d'une symétrie par rapport à un plan $\overrightarrow{P}$ et d'une rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ orthogonal à $\overrightarrow{P}$ et d'angle θ.

On a $2\cos\theta - 1 =$ trace(M) et $\overrightarrow{\Delta}$ est donné par l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) tels que $\overrightarrow{f}$(x,y,z) = (-x,-y,-z).

Le plan $\overrightarrow{P}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\Delta}$, il suffit donc de trouver un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\Delta}$ et l' équation de $\overrightarrow{P}$ sera donnée comme l'ensemble des points A tels que le produit scalaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v}$ soit nul.

Il se peut que l'angle de la rotation soit nul et donc que $\overrightarrow{f}$ soit une symétrie par rapport à un plan que l'on trouve comme l'ensemble des points invariants de $\overrightarrow{f}$.

6. Étude de l'isométrie affine f

Le cas det($\overrightarrow{f}$) = 1

f est un vissage donc le composé d'une translation et d'une rotation.

La rotation est d'axe Δ de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et d'angle θ et le vecteur de translation, $\overrightarrow{v}$ est parallèle à Δ.

Pour trouver Δ il suffit de remarquer que Δ est **globalement** invariante et donc que pour tout point A de Δ il existe un λ réel tel que $\overrightarrow{Af(A)} = \lambda\overrightarrow{v}$ et donc $\Delta = \{(x,y,z)/f(x,y,z)-(x,y,z) = \lambda\overrightarrow{v}\}$ ce qui donnera les équations paramétriques de Δ.

($\overrightarrow{v}$ étant un vecteur directeur de $\overrightarrow{\Delta}$)

Pour trouver le vecteur de translation il suffit de prendre un point de Δ, A et de considérer le vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$.

Il se peut que le vissage soit réduit à une translation ou une rotation.

Le cas det($\overrightarrow{f}$) = -1

f est alors

soit une symétrie glissée donc de la forme $t_{\overrightarrow{v}} \circ s$ où s est une réflexion par rapport à un plan P de direction $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur parallèle à P

Il se peut que f se réduise à une réflexion.

soit de la forme $r \circ s$ où s est une réflexion par rapport à un plan P de direction $\overrightarrow{P}$ et r une rotation autour d'un axe Δ de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et orthogonale à P.

Il se peut que f se réduise à une réflexion.

Ce qui différencie ces 3 cas est l'ensemble des points fixes : en effet pour une réflexion l'ensemble des points fixes est un plan, pour une rotation-symétrie c'est un point et pour une symétrie glissée il n'y a pas n'a pas de points fixes.

Donc dans un premier temps on cherche les points fixes.

Si on trouve un plan P , le probléme est résolu c'est une réflexion par rapport au plan P.

Si on trouve un seul point fixe

c'est une rotation-symétrie et on sait que l'axe de cette rotation passe par ce point fixe et comme sa direction est $\overrightarrow{\Delta}$ l'axe est connu car on obtient les équations paramétriques de Δ. En effet si $\overrightarrow{w}$ est un vecteur directeur de Δ et A un point de Δ alors le vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{w}$. Donc $\Delta = \{(x,y,z)/f(x,y,z) - (x,y,z) = \lambda\overrightarrow{w}\}$. L' angle de la rotation est θ.

Pour le plan P, il est orthogonal à Δ ou encore est de direction $\overrightarrow{P}$ et passe par le point fixe. Donc si léquation de $\overrightarrow{P}$ est ax+by+cz = 0, l' équation de P sera ax+by+cz+k = 0 et il suffit pour trouver k d'utiliser le point fixe.

Si on ne trouve aucun point fixe c'est une symétrie glissée.

Pour trouver le plan P si l'équation de $\overrightarrow{P}$ est ax+by+cz = 0, l' équation de P sera ax+by+cz+k = 0 et comme le plan P est globalement invariant on trouve k en utilisant le fait que pour tout A de P $\overrightarrow{Af(A)}$ appartient au plan P. On peut aussi remarquer que pour tout point A de l'espace le milieu du segment $[A, f(A)]$ appartient au plan P.

Pour le vecteur de translation on prend un point de P et on examine le vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$.

7. Exercices

Dans toute la suite l'espace est rapporté à un repére orthonormé direct et les expressions analytique de f sont données dans ce repére.

Exercice 13.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vérifier que f_1 est une isométrie et donner les caractéristiques géométrique de f_1 si :

$$f_1(x,y,z) = (\frac{1}{3}(\alpha + 2x + 2y - z), \frac{1}{3}(\alpha - 1 - x + 2y + 2z), \frac{1}{3}(\alpha - 2 + 2x - y + 2z))$$

Exercice 14. Vérifier que f_2 est une isométrie et donner les caractéristiques géométrique de f_2 si :

$$f_2(x,y,z) = (\frac{1}{9}(x - 8y - 4z + 2), \frac{1}{9}(-8x + y - 4z + 2), \frac{1}{9}(-4x - 4y + 7z + 1))$$

Exercice 15. Vérifier que f_3 est une isométrie et donner les caractéristiques géométrique de f_3 si :

$$f_3(x,y,z) = (2 - z, 2 - x, 2 - y)$$

Exercice 16. Vérifier que f_4 est une isométrie et donner les caractéristiques géométrique de f_4 si :

$f_4(x, y, z) = (2 - z, x + 1, y + 1)$

7.1. **Corrigé succint des exercices.**

Exercice 17 (Etude de f_1 - Cas d'un vissage)**.**

a) Etude de $\overrightarrow{f_1}$:

On vérifie facilement que la matrice M de $\overrightarrow{f_1}$ est une matrice orthogonale de déterminant $+1$ donc $f_1 = r(\overrightarrow{\Delta}, \theta)$, rotation vectorielle d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et d'angle θ.

Détermination de l'axe $\overrightarrow{\Delta}$:

C'est l'ensemble des points invariants de $\overrightarrow{f}_1$, soit la droite vectorielle d'équations,

$$x - 2y + z = 0, x + y - 2z = 0$$

Un vecteur directeur de $\overrightarrow{\Delta}$ est obtenu par le produit vectoriel de $(1, -2, 1)$, et $(1, 1, -2)$ soit $\overrightarrow{v} = 3(1, 1, 1)$.

Détermination de l'angle θ :

On a $2\cos(\theta) + 1 = 2$ soit $\theta = \pi/3$

Déterminons le signe de $\sin\theta$. Prenons pour vecteur normal à $\overrightarrow{\Delta}$ le vecteur $\overrightarrow{n}$ = (1,-1,0). Donc $\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{n})$ = (0,-1,1) et le signe du déterminant $|\overrightarrow{n}, \overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{n}), \overrightarrow{v}|$ est négatif donc $\theta = -\pi/3$. (En fait pour vérifier les calculs on a $\sin\theta = \dfrac{|\overrightarrow{n}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{n}), \overrightarrow{v}|}{\| \overrightarrow{n}^2 \| \| \overrightarrow{v} \|} = -\sqrt{3}/2$).

b) Etude de f_1 :

On sait donc que f_1 est un vissage.

Calculons l'axe Δ de la rotation :

Cet axe Δ est paralléle à $\overrightarrow{\Delta}$ et globalement invariant par f donc $\Delta = \{(x, y, z)/f(x, y, z) - (x, y, z) = \lambda\overrightarrow{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ soit dans le cas présent

$$\alpha - x + 2y - z = \alpha - 1 - x - y + 2z = \alpha - 2 + 2x - y - z$$

La droite Δ est donc la droite d'équations

$$3x - 3z = 1, 3y - 3z = 1$$

Reste à trouver le vecteur de translation :

Il suffit de prendre un point de Δ, par exemple le point A = (1/3,-1/3,0) et de calculer le vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$.

On trouve : $(\alpha - 1, (\alpha - 1)/3, (\alpha - 1)/3)$.

On remarquera que si $\alpha = 1$ alors le vissage se réduit à une rotation.

Exercice 18 (Etude de f_2 - Cas d'une réflexion)**.**

On vérifie facilement que la matrice M de $\overrightarrow{f_2}$ est la matrice d'une isométrie de déterminant -1 et donc que $\overrightarrow{f_2}$ est la composée d'une symétrie par rapport à un plan $\overrightarrow{P}$ et d'une rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ orthogonal à $\overrightarrow{P}$ et d'angle θ.

Examinons les points fixes de f_2 :

On trouve que l'ensemble des points fixes de f_2 est le plan P d'équation $4x + 4y + 2z = 1$ donc f est une réflexion par rapport au plan P.

Exercice 19 (Etude de f_3 - Cas d'une rotation-symétrie)**.**

On vérifie facilement que la matrice M de $\overrightarrow{f_3}$ est la matrice d'une isométrie de déterminant -1 et donc que $\overrightarrow{f}$ est la composée d'une symétrie par rapport à un plan $\overrightarrow{P}$ et d'une rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ orthogonal à $\overrightarrow{P}$ et d'angle θ.

Examinons les points fixes de f_3 :

On trouve un seul point fixe A de coordonnées (1,1,1). Donc $f_3 = r(\Delta, \theta) \circ s_P$ où le plan P est orthogonal à Δ et $P \cap \Delta = \{A\}$.

Etude de $\overrightarrow{f} = r(\overrightarrow{\Delta}, \theta) \circ s_{\overrightarrow{P}}$.

L'axe de la rotation $\overrightarrow{\Delta}$ est donnée par $\{(x, y, z)/\overrightarrow{f_3}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ soit la droite d'équation $x = z, y = x$ donc de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$.

L'angle θ de la rotation est donné par $\cos\theta = 1/2$ et le signe de $\sin\theta$ par le signe du déterminant $|(1, -1, 0), (0, -1, 1), (1, 1, 1)|)$. Donc $\theta = -\pi/3$.

L'axe de la rotation Δ est la droite de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et passant par A donc d'équation $x = y = z$.

Reste à trouver l'équation du plan P : Il est orthogonal à Δ et passe par A. Comme un vecteur directeur de Δ est (1,1,1), son équation est du type $x + y + z + c = 0$ et comme $A \in P$ on trouve $x + y + z - 3 = 0$.

Exercice 20 (Etude de f_4 - Cas d'une rotation-symétrie)**.**

On vérifie facilement que la matrice M de $\overrightarrow{f_4}$ est une matrice orthogonale de déterminant -1.
On cherche les points fixes de f_4.
On trouve un seul point fixe à savoir le point $A = (0, 1, 2)$, donc $f_4 = r(\Delta, \theta) \circ s_P$ où Δ est orthogonale à P.
Pour obtenir les équations de Δ et P, on étudie $\overrightarrow{f_4}$.

Etude de $\overrightarrow{\Delta}$:
L'axe de la rotation vectorielle, $\overrightarrow{\Delta}$, est donnée par $\{(x, y, z)/\overrightarrow{f_4}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ soit la droite d'équation $x = z, y = -z$ donc de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$. Comme l'axe Δ est parallèle à $\overrightarrow{\Delta}$ et passe par le point A, on trouve les équations paramétriques $x = \lambda, y = -1 + \lambda, z = 1 + \lambda$ soit l'équation cartésienne $y = -1 + x, z = 1 + x$.

Etude de l'angle θ :
On sait que $2\cos\theta - 1 = 0$ donc $\theta = \pi/3$. Déterminons le signe de θ.
On a le signe de $\sin\theta$ par le signe du déterminant $|(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1)| = 3$,donc $\theta = \pi/3$ (modulo 2π) .
Etude du plan P :
L'équation de $\overrightarrow{P}$ est $x - y + z = 0$, et comme le point A appartient à P, on trouve l'équation $x - y + z - 1 = 0$.