Quelques exercices de géométrie Euclidienne en dimension 2 et 3

Dans toute la suite on suppose que les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont munis de la base canonique et du produit scalaire usuel et que les matrices sont données dans cette base.

Exercice 2 [Projections et Symétries]

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique. Soit H le plan d'équation $x + 2y + 2z = 0$. Soit π la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

(1) Déterminer un vecteur ϵ_1 normal à H et unitaire.

(2) Pour tout vecteur V de E, écrire $V - \pi(V)$, puis $\pi(V)$ à l'aide de V et ϵ_1 seulement. (On pourra utiliser des produits scalaires comme coefficients).

(3) Déterminer les matrices de π et de s dans la base canonique. Sont-elles orthogonales, symétriques ?

Solution :

(1) Vu l'équation de H le vecteur,$\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y, z) appartient à H si et seulement si le produit scalaire de ,$\overrightarrow{u}$ et du vecteur,ϵ de coordonnées $(1, 2, 2)$ est nul. Donc le vecteur ϵ est orthogonal à H. on a donc $\epsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) $V - \pi(V)$ appartient à $H^\perp$ donc $V - \pi(V) = \lambda\epsilon_1$ et $\pi(V)$ appartient à H donc est orthogonal à ϵ_1 soit $< \epsilon_1, \pi(V) > = 0$. Donc $< V - \pi(V)/\epsilon_1 >=< V/\epsilon_1 >= \lambda$. Par suite $\pi(V) = V - < V/\epsilon_1 > \epsilon_1$.

(3) On calcule alors les images des vecteurs de la base canonique par la formule de 2). Par exemple si $e_1 = (1, 0, 0)$ est le premier vecteur on trouve que $\pi(e_1) = \dfrac{1}{9}(8e_1 - 2e_2 - 2e_3)$. On trouve donc la matrice

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

s est caractérisée par le fait que si M est un point alors $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{M\pi(M)}$ si donc M est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OM}$, comme $\overrightarrow{Ms(M)} = 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{O\pi(M)})$ on obtient que $s = -Id + 2\pi$. la matrice est donc

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 [Rotation] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que f est une rotation. (En dimension 3, une rotation est une isométrie de déterminant 1.)

(2) Trouver un vecteur unitaire V_1 de l'axe de la rotation.

(3) Compléter en une base orthomormée de $\mathbb{R}^3$.

(4) Ecrire la matrice de f dans cette base.

Solution :

(1) On vérifie que A est orthogonale (les vecteurs colonnes sont de norme 1 et leurs produits scalaires deux à deux est nul) et le déterminant est 1. (remarque : ne pas oublier lors du calcul le $1/7^3$). Donc A est la matrice d'une rotation d'axe Δ et d'angle θ tel que $2cos(\theta)+1 = Tr(A)$. soit $cos(\theta) = -5/14$.

(2) L'axe de la rotation est donné par l'ensemble des points fixes donc les points de coordonnées (x, y, z) tels que

$$\begin{cases} 2x & 6y & -3z & = 7x \\ 3x & 2y & 6z & = 7y \\ 6x & -3y & -2z & = 7z \end{cases}$$

On trouve $y = x, y = 3z$. (Remarquons que le système est surement de rang 2 car on doit obtenir une droite donc une intersection de deux plans) donc un vecteur directeur V_1' de Δ est $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur orthogonal à V_1' est par exemple le vecteur $V_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque le produit scalaire $< V_1', V_2' >= 0$. Pour trouver le troisiéme vecteur de base il suffi de remarquer que V_3' est orthogonal à V_1' et V_2'et donc de former le produit vectoriel $V_1' \triangle V_2'$. Donc $V_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme on veut une base orthonormée on aura

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(3) Dans la base (V_1, V_2, V_3) est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$.

Soit on fait le calcul de $f(V_1), f(V_2), f(V_3)$ en fonction de V_1, V_2, et V_3. On trouve

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 0 & -0 \\ 0 & -5 & 3\sqrt{19} \\ 0 & -3\sqrt{19} & -5 \end{pmatrix}$$

Soit on utilise le fait que l'on connait la forme de la matrice et comme $cos\theta$ est donné par $2cos(\theta) + 1 = Tr(A)$ et puisque $f(V_2) = cos\theta\ V_2 +\ sin\theta\ V_3$ on a $< f(V_2)/V_3 >= sin\theta$.

Exercice 4 [Projection orthogonale]

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une projection orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 5 [les involutions]

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit u une transformation orthogonale de E telle que $u^2 = Id$. On dit que u est une involution.

(1) Montrer que u est diagonalisable.

(2) Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux.

(3) Soit $a \in E - \{0\}$ et

$$\begin{array}{cccc} u_a : & E & \rightarrow & E \\ & x & \mapsto & x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a \end{array}$$

Montrer que u_a est une involution orthogonale. Déterminer ses espaces propres et décrire u géométriquement.

(4) Soit u une involution orthogonale et w une transormation orthogonale. Montrer que wuw^{-1} est une involution orthogonale et que $Ker(wuw^{-1} - Id) = w\big(Ker(u - Id)\big)$.

(5) Soit $a, b \in E - \{0\}$. Montrer que u_a et u_b sont conjuguées par une transformation orthogonale.