TRANSFORMATIONS AFFINES ET LINEAIRES

Dans toute la suite E est un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension fini.

Une propriété importante, que nous utiliserons par la suite, est que si F et G sont deux sous-espaces affines de E tels que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$ alors $F \cap G$ est réduit à un point.

Rappelons que f est une appplicationaffine de E dans E si pour tout point A et M de E $f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$, où $\overrightarrow{f}$ est linéaire.

Donc si f a un point fixe l'étude de f est réduite à celle de $\overrightarrow{f}$. C'est pourquoi nous étudierons d'abord la partie linéaire puis la partie affine

1. LES PROJECTIONS

1.1. **Projection vectorielle.** Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces supplémentaires de $\overrightarrow{E}$ donc $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. Par suite tout $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{E}$ s'écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ où $\overrightarrow{u_1} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{G}$.

On appelle projection sur $\overrightarrow{G}$ parallélement à $\overrightarrow{F}$ le morphisme p défini par $p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u_2}$.

Le théoréme suivant donne une caractérisation des projections :

Un morphisme de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{E}$ est une projection si et seulement si $p \circ p = p$.

1.2. **Projection affine.** Soit F et G deux sous espaces affines de E. On suppose que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. Soit A le point d'intersection de F et G.

La projection sur G parallélement à F est définie par $p(M) = A + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AM})$ si $\overrightarrow{p}$ est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{G}$ parallélement à $\overrightarrow{F}$.

Donnons un exemple :

Prenons E l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2)$.

On considère les droites d'équations dans $\mathcal{R}$

$D_1 : x + y + 1 = 0$ et $D_2 : x - y - 1 = 0$. Si M est de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ donner les coordonnées de $p(M)$, dans $\mathcal{R}$, si p est la projection sur D_1 parallélement à D_2.

La solution :

2. LES SYMÉTRIES

2.1. **symétrie vectorielle.** Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces supplémentaires de $\overrightarrow{E}$ donc $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. Par suite tout $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{E}$ s'écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ où $\overrightarrow{u_1} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{G}$.

On appelle symétrie de base (ou encore d'axe) G parallélement à $\overrightarrow{F}$ le morphisme s défini par $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$.

Donc $\overrightarrow{F} = ker(f - Id)$ et $\overrightarrow{G} = ker(f + Id)$.

Le théoréme suivant donne une caractérisation des symétries :
Un morphisme s de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{E}$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id$.

2.2. **Symétrie affine.** Soit F et G deux sous espaces affines de E. On suppose que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. Soit A le point d'intersection de F et G.

La symétrie de base G parallélement à F est définie par $s(M) = A + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{AM})$ si $\overrightarrow{s}$ est la symétrie vectorielle sur $\overrightarrow{G}$

Donnons un exemple :

Prenons E l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. Donner l'expression analytique de la symétrie d'axe $x+y+z=1$ parallélement à $\overrightarrow{A_0A_1}$.

La solution :

Il s'agit de trouver $s(M)$ en sachant que s est la symétrie par rapport à la droite (D) d'équation $y=0, z=0$ d'axe le plan (P) $x+y+z=1$.

Un point fixe est donc le point $A = (P) \cap (D)$ donc de coordonnées $(1,0,0)$. Par suite $s(M) = A + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{AM})$.

Dans $\overrightarrow{E}$ nous savons que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{P}$. L'équations de $\overrightarrow{D}$ est $y=0, z=0$ et celle de $\overrightarrow{P}$ est $x+y+z=0$.

Appliquant la définition on trouvera

$$\mathrm{s}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{s}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x-2y-2z \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

car $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour la décomposition de $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{P}$.

3. Affinité

3.1. **Affinité vectorielle.**

On appelle affinité de base $\overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{H}$ hyperplan de E (donc de dimension n - 1), de direction $\overrightarrow{D}$ ($\overrightarrow{H}$et $\overrightarrow{D}$étant supplémentaires) et et de rapport λ le morphisme a tel que $a|_{\overrightarrow{H}} = Id$ et $a|_{\overrightarrow{D}}$ soit l'homothétie de centre $\overrightarrow{H} \cap \overrightarrow{D}$ et de rapport λ donc $a(\overrightarrow{u}) = \lambda u_1 + \lambda u_2$ dans la décompsition $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H} \oplus \overrightarrow{D}$.

3.2. **Le cas affine.** Soit H un hyperplan affine de E et $\overrightarrow{D}$ un supplémentaire de $\overrightarrow{H}$. Notons par A l'intersection de H et $\overrightarrow{D}$ L'affinité de base H, de direction $\overrightarrow{D}$,de rapport λ est définie par $a(M) = A + \overrightarrow{a}(\overrightarrow{AM})$ si $\overrightarrow{a}$ est l'affinité vectoriellede base

H, de direction $\overrightarrow{D}$ et de rapport λ.

Comment construire géométriquement le point $a(M)$?

On trace parallélement à $\overrightarrow{D}$ une droite passant par M qui coupe H en un point H. Le point $a(M)$ est alors obtenu par $\overrightarrow{Ha(M)} = \lambda\overrightarrow{HM}$.

Donnons un exemple :

Prenons E l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. Donner l'expression analytique de l'affinité de base $x + y + z = 1$, parallélement à $\overrightarrow{A_0A_1}$ et de rapport 3.

Solution détaillée :

Ici l'hyperplan (H) a pour équation $x + y + z = 1$ et donc sa direction est $\overrightarrow{H}$ d'équation$x + y + z = 0$ et $\overrightarrow{D}$ a pour équation $y = 0, z = 0$.

Donc $H \cap \overrightarrow{D}$ est le point A de coordonnées $(1, 0, 0)$, point fixe pour l'affinité. Par suite $a(M) = A + \overrightarrow{a}(\overrightarrow{AM})$ où $\overrightarrow{a}$ est la partie linéaire.

Comme $\overrightarrow{AM}$ appartient à $\overrightarrow{H} \oplus \overrightarrow{D}$ on a

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $X + Y + Z = 0$ soit

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-1+y+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{a}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3(x-1)+2y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On est souvent confrontéà la situation inverse, c'est à dire de retrouver la signification géométrique à partir de l'expression analytique . En voici un exemple :

Soit E l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. On considére l'application affine définie par son expression analytique :

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y+2z-4 \\ -2x-3y-2z+4 \\ 4x+8y-5z+8 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques.

Solution :

Cherchons les points fixes. On trouve le plan $(H) : x+y+z-2 = 0$. C'est la base de l'affinité. Le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$, si M est de cooordonnées (x, y, z) , $(2x+4y+2z-4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{D} = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Reste donc à trouver le rapport λ.

Si $p(M)$ est la projection de M sur H parallélement à $\overrightarrow{D}$ alors $\overrightarrow{Mf(M)} = \lambda\overrightarrow{Mp(M)}$. Il suffif donc de calculer les coordonnées de $p(M)$.

$\overrightarrow{Mp(M)}$ appartient à $\overrightarrow{D}$ donc $\overrightarrow{Mp(M)} = \alpha\overrightarrow{u}$ et $p(M) = \begin{pmatrix} x+\alpha \\ y-\alpha \\ z+2\alpha \end{pmatrix}$ et comme $p(M)$ appartient à H $\alpha =$

4. Transvection

4.1. Transvection vectorielle. Une transvection t de base $\overrightarrow{H}$ et de direction $\overrightarrow{D}$ est un morphisme t tel que $t|_{\overrightarrow{H}} = Id$ donc $ker(f - Id) = \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{D} = Im(f - Id)$ est contenu dans $\overrightarrow{H}$.

On montre que un morphisme t est une transvection si et seulement si $(f - Id)^2 = 0$.

4.2. Transvection affine. Une application affine, t, de E dans E est une transvection si l'ensemble des point invariants H est un hyperplan de E (direction de la tansvection) et si pour tout point M le vecteur $\overrightarrow{Mt(M)}$ reste parallèle à H. Ces vecteurs forment une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ (axe de la transvection).

Comment construire géométriquement le point $t(M)$ si on connait $t(A) = A'$, A un point de E ?

Il suffit de tracer les deux droites (AM) qui rencontre l'hyperplan H en I. M' est sur la droite IA' et $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à $\overrightarrow{AA'}$.

Donnons un exemple :

Prenons E l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. Donner l'expression analytique de la transvection de base le plan $x + y + z = 1$ qui envoie le point A_0 sur le point de coordonnées $(1, 1, -2)$.

Solution :

Tout point du plan est fixe donc le point $A = (1, 0, 0)$ est fixe. Soit $\overrightarrow{t}$ la partie linéaire de la transvection. On sait que c'est l'idendité sur le plan $x + y = z = 0$.

On a $\overrightarrow{t}(\overrightarrow{A_0A}) = \overrightarrow{t(A_0)A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On trouvera $t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z+1 \\ -x-z+1 \\ 2x+2y+3z-2 \end{pmatrix}$