Exercices de D04
Université Rennes 1

Feuille 4

1. ACTION DE GROUPES

Exercice 1.0.1. Soit $G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})\}$.

On fait agir G sur $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle. Décrire les orbites.

Exercice 1.0.2. On fait agir S_3 sur S_3 par conjuguaison. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 1.0.3. Un groupe de 35 éléments opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun d'eux. Combien y a t-il d'orbites ?

Exercice 1.0.4. Soit G un groupe de $143 = 11 \times 13$ éléments opérant sur un ensemble de 108 éléments. Montrer qu'il existe un point fixe.

Exercice 1.0.5. Soit G un groupe d'ordre n et q un diviseur de n. On fait agir G sur G par conjuguaison.

Montrer que si g,élément de G, est d'ordre q alors $|Gg|$ divise $\dfrac{n}{q}$.

Exercice 1.0.6. On dira que l'action du groupe G sur X est transitive si pour tout x, y de G, il existe g de G tel que $g.x = y$.

a) Montrer que l'action naturelle de $GL(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas transitive, mais quelle induiit une action transitive sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $O^+(2,\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $O^+(3,\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphére unité de $\mathbb{R}^3$

Exercice 1.0.7. Soit G un groupe d'ordre p^n (p premier) et H un sous-groupe distingué de G ($H \neq \{e\}$).

Montrer en faisant agir G sur H par conjuguaison que $H \cap Z(G) \neq \{e\}$.

Exercice 1.0.8. Soit G un groupe fini non commutatif. On fait agir G sur lui-même par conjuguaison.

a) Montrer que si g est un élément de G, n'appartenant pas à $Z(G)$ alors $Z(G) \not\subset G_g \not\subset G$.

b) En déduire que $Z(G)$ est un sous-groupe de G d'indice strictement supérieur au plus petit entier premier divisant l'ordre de G.

c) Soit p un entier premier. Quel est l'ordre du centre d'un groupe non commutatif d'ordre p^3 ?

d) Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est commutatif.

Exercice 1.0.9. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe propre de G. On note par E l'ensemble des conjugués de H.

On fait agir G sur E par conjuguaison et on note par $N(H)$ le stabilisateur de H pour cette action.

a) Montrer que si l'indice de $N(H)$ dans G est m, il existe des éléments $g_1, \ldots, g_m$ de G tels que $E = \{g_1 H g_1^{-1}, \ldots, g_m H g_m^{-1}\}$.

b) On pose $M(H) = \cup_{g \in G} gHg^{-1}$. Montrer que $|M(H)| \leq |G| + 1 - |G/H|$.

Exercice 1.0.10. Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble X, ensemble fini. On note, pour tout g de G par $f(g)$ le cardinal de $F(G) = \{x \in X/g.x = x\}$.

Montrer que $(\sum_{g \in G} f(g))/|G|$ est le nombre d'orbites.

Exercice 1.0.11. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G, d'indice d,$d \neq 1$ étant le plus petit entier divisant l'ordre de G. On note $N(H) = \{g \in G/gHg^{-1} = H\}$.

a) Montrer que $N(H)$ est un sous-groupe de G et que $N(H) = H$ où G.

Dans toute la suite, on suppose que $N(H) = H$.

b) On fait opérer H sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des conjugués de H, qui est donc l'orbite de H pour l'action de G, par conjuguaison, sur l'ensemble de ses sous-groupes.

Quel est le cardinal de $\mathcal{C}$?

Montrer que H opère sur $\mathcal{C}$ par conjuguaison.

c) Soit $K \in \mathcal{C}$. Montrer que le cardinal de l'orbite de K est égale à 1 où d.

d) Soit $K \in \mathcal{C}, K \neq H$. Montrer que $H_K = H \cap K$.

e) En déduire que l'hypothèse $N(H) = H$ est impossible et conclure que H est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 1.0.12. Soit G un groupe d'ordre p^n (p premier). On fait opérer G sur X ensemble fini.

Montrer que si Fix(G) est l'ensemble des points fixes de G alors $\mid \mathrm{Fix}(G) \mid \equiv \mid X \mid$ (modulo p).

Exercice 1.0.13. Soit G un groupe fini d'ordre n et q un diviseur de n.

Montrer que si g est un élément d'ordre q, alors le cardinal de l'ensemble des conjugués de g divise $\frac{n}{q}$.

Exercice 1.0.14. Le but est de montrer que tout groupe d'ordre 15 a un centre Z(G) non trivial puis que G est commutatif.

On rappelle (cf l'exercice 40) que le nombre d'éléments d'ordre p, p premier dans un groupe est un multiple de p - 1.

a) On suppose que $\mathrm{Z}(G) = \{e\}$. En faisant opérer G sur G par conjuguaison, montrer que l'on a une seule orbite à 5 éléments et 3 orbites à 3 éléments. Quel est l'ordre des éléments de ces orbites ?

En déduire que $\mathrm{Z}(G) \neq \{e\}$.

b) Montrer que G est commutatif (Utiliser l'exercice 27)

Exercice 1.0.15. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On note par X l'ensemble des conjugués de H.

Montrer que si p est un entier premier tel que $[G : H] < p$ alors $|X| < p$. Indication faire agir G sur X par conjuguaison

Exercice 1.0.16. a) Déterminer les groupes finis possédant exactement 1 classe de conjuguaison puis 2 classes de conjuguaison.

b) On désire trouver tous les groupe finis ayant 3 classes de conjuguaison.

Soit donc G un groupe fini d'ordre n ayant exactement 3 classes de conjuguaison.

Montrer que $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (*) avec des entiers $a \geq b > 0$ tels que a divise n et b divise n.

D/'eterminer toutes les solutions de (*).(On trouvera les trois triplets (n,a,b) = (6,3,2) ou (4,4,2) ou (3,3,3).

Conclure.

Exercice 1.0.17. Soit G un groupe fini et n le nombre de classes de conjuguaison.

Montrer que si $Z(G)$ est le centre de G alors

$$|G| \leq |Z(G)| + (n - |Z(G)|)\frac{|G|}{|Z(G)|}$$

Exercice 1.0.18. Soit K un corps fini de q éléments. On considére l'action naturelle de $GL(n,K)$ sur K^n c'est à dire $(M,(x_1,\ldots,x_n)) \to M(x_1,\ldots x_n)$.

Donc M peut etre considéré comme la matrice d'une application linéaire bijective de K^n dans K^n écrite dans la base canonique de K^n $(e_1 \ldots, e_n)$

Donner une relation entre $|G_{e_1}|$ et $|GL(n-1,K)|$ et en déduire une formule entre $|GL(n,K)|$ et $|GL(n-1,K)|$. Quel est le cardinal de $GL(n,K)$ en fonction de q ?

Exercice 1.0.19. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe $\neq G$.

1) Montrer que H coupe toutes les classes de conjuguaison de G si et seulement si

$$\bigcup_{a\in G} aHa^{-1} = G$$

.

2) Soit X l'ensemble des conjugués de H. On fait agir G sur X par conjuguaison. Montrer que

$$|\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}| \leq 1 + \frac{|G|}{|H|}(|H|-1)$$

3) En déduire qu'il existe une classe de conjuguaison C de G tel que $H \bigcap C \neq \emptyset$