Exercices de D04
Université Rennes 1

Feuille 3

1. LE GROUPE S_n

Exercice 1.0.1. Soit σ la permutation, élément de S_{12}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner la décomposition de σ en cycles disjoints.
Calculer σ^{2000}.

Exercice 1.0.2. Soit $\sigma =$ (3, 1, 4) (1, 5, 9, 2, 6) (5, 3), élément de S_9.
Donner la décompostion de σ en cycles disjoints.

Exercice 1.0.3. Montrer que si $n \geq 3$ le centre de S_n est réduit à l'idendité.

Exercice 1.0.4. Montre que si $\sigma \in S_{10}$ alors ordre(σ) ≤ 30.

Exercice 1.0.5. Existe t'il un élément d'ordre 6 dans S_4 ?

Exercice 1.0.6. a) Montrer que $S_n = <$ (1,2) ... (1,n)$>$.
b) Montrer que $S_n = <$ (1,2), (2,3), ... ,(n-1,n)$>$
c) Montrer que $S_n = <$ (1,2), (1,2,...,n)$>$
d) Montrer que A_n est engendré par les cycles de longueur 3.

Exercice 1.0.7. Soit $H = \{(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$. sous-ensembe de S_4.
a) Montrer que H est un sous-groupe distingué de A_4 et de S_4.
b) A quels groupes connus sont isomorphes $\dfrac{S_4}{H}$ et $\dfrac{A_4}{H}$?

Exercice 1.0.8. Dans S_4 on considère les deux permutations $\alpha = (1,2)(3,4)$ et $\beta = (1,3)(2,4)$, et H le sous-groupe engendré par α et β.
1) Calculer $\alpha\beta$. En considérant les ordres de α et β, montrer que H est un groupe de 4 éléments d'ordre divisant 2 et de signature 1.
2) Montrer que deux éléments conjugués de S_4 ont même ordre et même signature. En déduire que H est distingué.

Exercice 1.0.9. Soit σ et τ deux cycles de longueurs n de S_n tels que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$
Montrer que $<\sigma> = <\tau>$.

Exercice 1.0.10. Soit $\sigma \in S_{10}$ d'ordre 14. Montrer que σ est une permutation impaire.

Exercice 1.0.11. En considérant (a,b) (a,c) (a,b)$^{-1}$ (a,c)$^{-1}$, montrer que D(S_n) $= A_n$.

Exercice 1.0.12. Soit f un morphisme de S_n dans S_m. Montrer que f(A_n) est contenu dans A_m.
On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 1.0.13. Trouver à isomorphisme prés tous les groupes d'ordre ≤ 7.

Exercice 1.0.14. a) Montrer que l'ordre du groupe GL(2,$\mathbb{F}_2$) est 6.
b) Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
Quels sont les ordres de σ et τ ?
Vérifiez que $\sigma\tau = \tau\sigma^2$.
c) En déduire que GL(2,$\mathbb{F}_2$) est le groupe engendré parσ et τ.
d) Montrer que GL(2,$\mathbb{F}_2$) est isomorphe au groupe S_3

Exercice 1.0.15. a) Existe- t'il un morphisme non trivial de S_3 dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{45\mathbb{Z}}$?

b) Quel est le nombre de morphisme(s) de $\dfrac{\mathbb{Z}}{45\mathbb{Z}}$ dans S_3 ?

Exercice 1.0.16. Montrer que dans S_4, $H = \{Id, (1,2)(3,4)\}$ est un sous-groupe distingué de A_4 (qui est lui même un sous groupe distingué de S_4) mais que H n'est pas distingué dans S_4.

Exercice 1.0.17. a) donner tous les éléments de A_4

b) Montrer que A_4 n'a pas de sous-groupe d'ordre 6 (bien que 6 divise $|A_4|$).

On pourra montrer que si H est un sous-groupe de A_4 alors H ne contient qu'un seul 3-cycle et son carré et conclure.