Exercices de D04
Université Rennes 1

Feuille 1

1. ENSEMBLE QUOTIENT

Exercice 1.0.1. Soient E, F deux ensembles, f une application de E dans F, et $\mathcal{R}'$ une relation d'équivalence sur F. On définit la relation sur E

$$x\mathcal{R}y \iff f(x)\mathcal{R}'f(y).$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
b) Montrer que pour toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, il existe un ensemble F et une application $f : E \to F$ telle que $\mathcal{R}$ puisse se définir comme ci-dessus avec $\mathcal{R}'$ la relation d'égalité.

Exercice 1.0.2. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
a) Si $x, y \in E$, $\bar{x} = \bar{y}$.
b)Si $x, y \in E$, $x \in \bar{y}$
c) Si $x, y \in E$, $y \in \bar{x}$

Exercice 1.0.3. Soit $E = \mathbb{R}^{\nvDash} - (0,0)$. Soit $\Re$ la relation sur E : $(x,y)\Re(x^{'}, y^{'}) \iff$ il existe λ réel tel que $(x,y) = \lambda(x^{'}, y^{'})$.
1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2) Montrer que $E/\Re$ est en bijection avec les droites vectorielles du plan.
3) Si (x,y) appartient à E on note par $\overline{(x,y)}$ sa classe dans $E/\Re$.
Montrer que quelque soit $\bar{\alpha}$ de $E/\Re$, $\bar{\alpha} \neq \overline{(1,0)}$, il existe un unique x de $\mathbb{R}$ tel que $\bar{\alpha} = \overline{(x,1)}$.
4) Soit a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$.
4-1) : Montrer que si (x,y) appartient à E alors $(ax+by, cx+dy)$ appartient à E.
4-2) : Montrer qu'il existe un unique application $g : E/\Re \longrightarrow E/\Re$ définie par $g(\overline{(x,y)}) = \overline{(ax+by, cx+dy)}$.
4-3) : Montrer que l'application g précédente est bijective.

Exercice 1.0.4. On considére sur E (respectivement F) deux relations d'équivalence $\mathcal{R}_1$ (respectivement $\mathcal{R}_2$) . Soit $p_1 : E \to \dfrac{E}{\mathcal{R}_1}$ et $p_2 : F \to \dfrac{F}{\mathcal{R}_2}$ les deux projections canoniques.
Si $f : E \to F$ est une application telle que

$$\forall x, x^{'} \in E \; x\mathcal{R}_1x^{'} \Rightarrow p_2(f(x)) = p_2(f(x^{'}))$$

Montrer qu'il existe une application $h : \dfrac{E}{\mathcal{R}_1} \to \dfrac{F}{\mathcal{R}_2}$ telle que $p_2 \circ f = h \circ p_1$

Exercice 1.0.5. Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{R}$:
$(x,y)\mathcal{R}(x^{'}, y^{'}) \iff \exists a, b \in \mathbb{R}$ tel que $ab \neq 0$ et $x = ax^{'}, y = by^{'}$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire l'ensemble quotient.
Mêmes questions en remplaçant la condition $ab \neq 0$ par $ab > 0$

2. GROUPE, SOUS-GROUPE, HOMOMORPHISME

Exercice 2.0.6. Les ensembles suivants sont-ils des groupes pour les lois de composition indiquées ?
a) $(\mathbb{Q} - \{0\}, a * b = ab/2)$
b) $(\mathbb{R}^{\geq 0}, a * b =\mid a - b \mid)$
c) $(\{A \in M_n(\mathbb{R})/Tr(A) \in \mathbb{Z}\}, +)$
d) $(\{A \in GL(n, (\mathbb{R})/A =^t A, \}, \times)$

Exercice 2.0.7. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne telle que :
a) Pour tout x, y, z de G $(xy)z = x(zy)$.
b) Il existe e de G tel que $ex = x$ pour tout x de G.
c) Pour tout x de G il existe y de G tel que $xy = e$.
Montrer que G est un groupe commutatif.

Exercice 2.0.8. Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément x $\neq e$ tel que $x = x^{-1}$.

Exercice 2.0.9. Soit G un groupe tel qu'il existe un unique élément x , x $\neq e$, et $x^2 = e$. Montrer que x appartient au centre de G (c'est à dire que x commute avec tous les éléments de G)

Exercice 2.0.10. Soit G un groupe tel que pour tout x de G $x^2 = e$.
Montrer que G est commutatif.

Exercice 2.0.11. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative . On suppose que pour cette loi G posséde un élément neutre e, et que pour tout x de G il existe y et y' de G tels que $yx = e = xy'$. Montrer que G est un groupe.

Exercice 2.0.12. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative. On suppose que G a un élément neutre e, et que pour tout x de G il existe y de G telque $yx = e$. Montrer que G est un groupe.

Exercice 2.0.13. Soit G un groupe et H un sous-ensemble de G stable pour la loi de G. H est-il un sous -groupe de G ? Et si on suppose que H est fini ?

Exercice 2.0.14. Soit S une partie non vide du groupe G. On pose $C_G(S) = \{g \in G/gx = xg \forall x \in G\}$.
a) Vérifier que $C_G(S)$ est un sous-groupe de G.
b) Si $Z(G)$ est le centre de G, montrer que $\cap_{x \in G} C_G(x) = Z(G)$.

Exercice 2.0.15. Soit G un groupe.
a) Montrer que si pour tout x et y de G on a $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, G est commutatif.
b) Montrer que si pour tout x et y de G on a $(xy)^2 = x^2y^2$, G est commutatif.
c) Montrer que si pour tout x et y de G on a $(xy)^3 = x^3y^3$ et $(xy)^5 = x^5y^5$, G est commutatif.

Exercice 2.0.16. a) Montrer que la réunion de deux sous-groupes d'un groupe G n'est pas en général un sous-groupe de G. (On pourra penser par exemple à des sous-groupes de $\mathbb{Z}$)
b) Montrer que la réunion de deux sous-groupes de G est un sous-groupe si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.

Exercice 2.0.17. Soit G un groupe fini tel que pour tout x de G, différent de e, $x^2 \neq e$. Quel est la parité de l'ordre de G ?

Exercice 2.0.18. Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ défini par $\{\dfrac{a}{10^n}/a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Prouver que D est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$.

b) Si p est un entier premier soit $\mathbb{Q}_{|} = \{\dfrac{a}{p^n}/a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Prouver que $\mathbb{Q}_p$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ et que l'application $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ définie par $f(x) = px$. Cette application est-elle un automorphisme du groupe$(\mathbb{Q}_p, +)$?

Exercice 2.0.19. Quel est l'ordre du groupe $GL(n, K)$ si K est un corps fini à q éléments. ?

On pourra remarquer qu'il s'agit de calculer le nombre de bases du K-espace vectoriel K^n.

Exercice 2.0.20. Soit G un groupe et $f : G \to G$ l'application définie par $f(x) = x^{-1}$. Montrer que f est un morphisme si et seulement si G est commutatif.

Exercice 2.0.21. Soit G un groupe et $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

a) Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

b) Pour tout g de G, on note int_g l'application définie par $\mathrm{int}_g(x) = gxg^{-1}$.

Montrer que int_g est un automorphisme de G, et que l'application $g \longrightarrow int_g$ est un homomorphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G)$. Déterminer son noyau.

Exercice 2.0.22. Soit G un groupe et H et K deux sous-groupes distingués de G. On suppose que $G = HK$ et que $H \cap K = \{e\}$. Montrer que G est isomorphe à $H \times K$.

Exercice 2.0.23. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = 10^x$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 2.0.24. Soit $f : G \longrightarrow G^{'}$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que si $H^{'}$ est un sous-groupe de $G^{'}$, $f^{-1}(H^{'})$ est un sous-groupe de Get que $\ker(f) \subset f^{-1}(H^{'})$.

b) On suppose que f est surjective.

Soit $X_1 = \{$ sous-groupe H de G contenant ker(f) $\}$

Soit $X_2 = \{$ sous-groupe $H^{'}$ de $G^{'}\}$.

Montrer que $f_* : X_1 \longrightarrow X_2$ définie par $f_*(H) = f(H)$ est une bijection. (On pourra expliciter f_*^{-1})

c) En déduire que les sous-groupes de $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ sont isomorphes à $\dfrac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$ où d divise n.

Exercice 2.0.25. Soit G le groupe $(\dfrac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}})^{\times}$, groupe des éléments inversibles de $\dfrac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$ pour la multiplication.

a) L'ensemble $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ est-il un sous-groupe de G ?

b) Existe t-il un sous-groupe propre de G contenant $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$?

Exercice 2.0.26. Montrer qu'à isomorphime prés il n'existe qu'un seul groupe d'ordre p, si p est premier.

Exercice 2.0.27. Soit m et n deux entiers.

a) Montrer que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

b) Montrer que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ si d $=$ pgcd(m, n).

Exercice 2.0.28. Soit G un groupe. Montrer que si $f : G \longrightarrow G$ définie par $f(x) = x^2$ est un morphisme alors G est commutatif.

Exercice 2.0.29. a) Montrer que $K_1 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$

est un sous-groupe de GL(2,$\mathbb{R}$).

b) Montrer que $K_2 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ est un sous-groupe du groupe mutiplicatif des éléments inversibles de $\dfrac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} - \{\bar{0}\}$.

c) Montrer que K_1 et K_2 sont isomorphes.

Exercice 2.0.30. Donner tous les sous-groupes de D_4. Parmi ces sous-groupes lesquels sont distingués ?

Exercice 2.0.31. Soit G un groupe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) G est commutatif.

b) l'application $g \longrightarrow g^2$ est un morphisme.

c) l'application $g \longrightarrow g^{-1}$ est un morphisme.