CONTROLE CONTINU DU 5/02/07 :D04

Tous documents interdits. Durée 30 minutes

NOM :

PRENOM :

Question de cours : (**1 pt)**

Donner la définition d'un sous-groupe distingué.

Exercice 1 : (2 pts)

Donner tous les morphismes de $(\frac{\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}}, +)$ dans $(\frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}, +)$.

Exercice 2 : (2,5 pts)

a) Montrer que tout élément de $(\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}})^{\times}$ (donc le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$) s'écrit $\bar{5}^k$ pour un k entier.

b) Montrer qu'il existe un isomorphisme $f : (\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}, +) \to (\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}})^{\times}$.

Exercice 3 :(1,5 pt)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Les rèponses seront justifiées.

a) $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

b) Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est isomorphe au groupe $(]0, \infty[, \times)$

1. Correction du CC1 de D04

Question de cours : (1 pt)

Donner la définition d'un sous-groupe distingué.
Solution
H est un sous-groupe distingué de G si H est un sous-groupe de G donc si $\forall h$ et $\forall h^{'} \in H$ $hh^{'-1} \in H$ et de plus $\forall g \in G$ $\forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.
Exercice 1 : (2 pts)
Donner tous les morphismes de $(\frac{\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}}, +)$ dans $(\frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}, +)$.

Solution :
On sait par le cours que f est un morphisme de $(\frac{\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}}, +)$ dans $(\frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}, +)$ si et seulement si $f(\bar{1}) = \tilde{k}$ avec $14k \equiv 0$ (modulo 21). Auquel cas $f(\bar{x}) = x\tilde{k}$.
Donc $14k = 21k^{'}$ soit $2k = 3k^{'}$ pour $k^{'}$ dans $\mathbb{Z}$. divise $2k$ et est premier avec 2 donc k est multiple de 3. On trouve donc pour $\tilde{k}$ les valeurs $\tilde{0}, \tilde{3}, \tilde{6}, \tilde{9}, \tilde{12}, \tilde{15}, \tilde{18}$.
Exercice 2 : (2,5 pts)
a) Montrer que tout élément de $(\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}})^{\times}$ (donc le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$) s'écrit $\bar{5}^k$ pour un k entier.

Solution :
Remarquons que $(\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}})^{\times}$ a 6 éléments qui sont les $\bar{k}$ où k est premier avec 7 (cf le cours).
a) Il suffit de calculer les puissances successives de $\bar{5}$ pour $k = 0..5$ en réduisant modulo 7. On trouve
$(\bar{5})^0 = \bar{1}, (\bar{5})^1 = \bar{5}, (\bar{5})^2 = \bar{4}, (\bar{5})^3 = \bar{6}, (\bar{5})^4 = \bar{2}, (\bar{5})^5 = \bar{3}$ et évidemment $(\bar{5})^6 = \bar{1}$

b) Montrer qu'il existe un isomorphisme $f : (\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}, +) \to (\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}})^{\times}$.
Il suffit de poser $f(\bar{k}) = \bar{5}^k$. En effet f est bien définie et f est un morphisme car$f(\bar{k} + \bar{k^{'}}) = f(k)f(k^{'})$ et f est surjective par a). Enfin les deux ensembles, de départ et d'arrivée ont même nombre d'éléments et donc f est bijective.
Exercice 3 :(1,5 pt)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Les rèponses seront justifiées.
a) $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
b) Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est isomorphe au groupe $(]0, \infty[, \times)$
Solution :
a) La réponse est NON car sinon $2 + 3 = 5 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.
b) la réponse est OUI car $f(x) = e^x$ est bien un isomorphisme.

D04 Goupe et action de groupe

(durée 30 minutes)
Tous documents et calculatrices interdits

NOM ET PRENOM

Question de cours : (1 point)

Soit G est un groupe cyclique dont la loi est notée multiplicativement. Si G est engendré par g, donner en fonction de g tous les générateurs de G.

(La démonstration du résultat n'est pas demandée).

Exercice 1 : (2 points)
Soit $\sigma = (1,3,5)(4,5,6,2)(1,3,4,2)$ élément de S_6.
Calculer σ^{2007} .
σ appartient-elle à A_6 ?

Exercice 2 : (4 points)
Soit G le groupe $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$.

1) G posséde t'il un élément d'ordre 24 ? (on justifiera la réponse) (0,5 point)

2) Donner tous les élément d'ordre 4 de G. (1 point)
3) Quel est l'ordre de l'élément $(\bar{2}, \bar{1})$ de G ? (1 point)

Si H est le sous-groupe engendré par $(\bar{2}, \bar{1})$, pourquoi H est-il distingué dans G ? (0,5 point)

A quel groupe connu $\dfrac{G}{H}$ est-il isomorphe ? On justifiera la réponse. (1 point)

CORRIGE DU CONTROLE CONTINU DU 5 MARS 2007

Question de cours : (1 point)

Soit G est un groupe cyclique dont la loi est notée multiplicativement. Si G est engendré par g, donner en fonction de g tous les générateurs de G.

(La démonstration du résultat n'est pas demandée).

Solution :

Les générateurs de G sont les g^k où k est premier avec n si n est l'ordre de G.

Exercice 1 : (2 points)

Soit $\sigma = (1,3,5)(4,5,6,2)(1,3,4,2)$ élément de S_6.

Calculer σ^{2007} .

σ appartient-elle à A_6 ?

Solution :

On décompose σ en cycles disjoints et on trouve $\sigma = (1,5,6,2,3)(4)$ donc $\sigma^{2007} = \sigma^{5\times 415+2} = \sigma^2 = (1,6,3,5,2)$.

σ est un cycle de longueur 5 donc sa signature est $(-1)^{5-1} = 1$ donc c'est un élément de A_6.

Exercice 2 : (4 points)

Soit G le groupe $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$.

1) G posséde t'il un élément d'ordre 24 ? (on justifiera la réponse) (0,5 point)

2) Donner tous les élément d'ordre 4 de G. (1 point)

3) Quel est l'ordre de l'élément $(\bar{2},\bar{1})$ de G ? (1 point)

Si H est le sous-groupe engendré par $(\bar{2},\bar{1})$, pourquoi H est-il distingué dans G ? (0,5 point)

A quel groupe connu $\dfrac{G}{H}$ est-il isomorphe ? On justifiera la réponse. (1 point)

Solution :

1)La réponse est NON car G est un groupe à 24 éléments et si donc s'il possédait un élément d'ordre 24 il serait cyclique et isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}$ ce qui contredit le théorème chinois car 4 et 6 ne sont pas premier entre eux.

2) Les éléments d'ordre 4 de G sont des couples $(\bar{a},\bar{b})$ qui doivent vérifier $(4\bar{a},4\bar{b}) = (\bar{0},\bar{0})$ donc pour $\bar{a}$ tout élément de $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ et $\bar{b} = \bar{0}$ ou $\bar{3}$. Mais certains de ces éléments sont d'ordre 1 (l'élément neutre) ou d'ordre 2. Il ne reste que $(\bar{1},\bar{0}),(\bar{3},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{3},\bar{3})$

3) Comme $\bar{1}$ est d'ordre 6 dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$, $(\bar{2},\bar{1})$ est d'ordre 6 car $6\times\bar{2} = \bar{0}$ dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$.

H étant un sous-groupe d'un groupe abélien il est distingué.

$\dfrac{G}{H}$ est un groupe à 4 éléments $(24/6 = 4)$ et la classe de $(\bar{1},\bar{0})$ est d'ordre 4 dans $\dfrac{G}{H}$ donc $\dfrac{G}{H}$ est isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$, D04 Goupe et action de groupe

(durée 30 minutes)
Tous documents et calculatrices interdits

NOM ET PRENOM

Question de cours : (1 point)

Soit G est un groupe cyclique dont la loi est notée multiplicativement. Si G est engendré par g, donner en fonction de g tous les générateurs de G.

(La démonstration du résultat n'est pas demandée).

Exercice 1 : (2 points)
Soit $\sigma = (1, 3, 5)(4, 5, 6, 2)(1, 3, 4, 2)$ élément de S_6.
Calculer σ^{2007} .
σ appartient-elle à A_6 ?

Exercice 2 : (4 points)
Soit G le groupe $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$.

1) G posséde t'il un élément d'ordre 24 ? (on justifiera la réponse) (0,5 point)

2) Donner tous les élément d'ordre 4 de G. (1 point)
3) Quel est l'ordre de l'élément $(\bar{2}, \bar{1})$ de G ? (1 point)

Si H est le sous-groupe engendré par $(\bar{2}, \bar{1})$, pourquoi H est-il distingué dans G ? (0,5 point)

A quel groupe connu $\dfrac{G}{H}$ est-il isomorphe ? On justifiera la réponse. (1 point)

CORRIGE DU CONTROLE CONTINU DU 5 MARS 2007

Question de cours : (1 point)

Soit G est un groupe cyclique dont la loi est notée multiplicativement. Si G est engendré par g, donner en fonction de g tous les générateurs de G.

(La démonstration du résultat n'est pas demandée).

Solution :

Les générateurs de G sont les g^k où k est premier avec n si n est l'ordre de G.

Exercice 1 : (2 points)

Soit $\sigma = (1,3,5)(4,5,6,2)(1,3,4,2)$ élément de S_6.

Calculer σ^{2007} .

σ appartient-elle à A_6 ?

Solution :

On décompose σ en cycles disjoints et on trouve $\sigma = (1,5,6,2,3)(4)$ donc $\sigma^{2007} = \sigma^{5\times 415+2} = \sigma^2 = (1,6,3,5,2)$.

σ est un cycle de longueur 5 donc sa signature est $(-1)^{5-1} = 1$ donc c'est un élément de A_6.

Exercice 2 : (4 points)

Soit G le groupe $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$.

1) G posséde t'il un élément d'ordre 24 ? (on justifiera la réponse) (0,5 point)

2) Donner tous les élément d'ordre 4 de G. (1 point)

3) Quel est l'ordre de l'élément $(\bar{2},\bar{1})$ de G ? (1 point)

Si H est le sous-groupe engendré par $(\bar{2},\bar{1})$, pourquoi H est-il distingué dans G ? (0,5 point)

A quel groupe connu $\dfrac{G}{H}$ est-il isomorphe ? On justifiera la réponse. (1 point)

Solution :

1)La réponse est NON car G est un groupe à 24 éléments et si donc s'il possédait un élément d'ordre 24 il serait cyclique et isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}$ ce qui contredit le théorème chinois car 4 et 6 ne sont pas premier entre eux.

2) Les éléments d'ordre 4 de G sont des couples $(\bar{a},\bar{b})$ qui doivent vérifier $(4\bar{a},4\bar{b}) = (\bar{0},\bar{0})$ donc pour $\bar{a}$ tout élément de $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ et $\bar{b} = \bar{0}$ ou $\bar{3}$. Mais certains de ces éléments sont d'ordre 1 (l'élément neutre) ou d'ordre 2. Il ne reste que $(\bar{1},\bar{0}), (\bar{3},\bar{0}), (\bar{1},\bar{3}), (\bar{3},\bar{3})$

3) Comme $\bar{1}$ est d'ordre 6 dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$, $(\bar{2},\bar{1})$ est d'ordre 6 car $6\times\bar{2} = \bar{0}$ dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$.

H étant un sous-groupe d'un groupe abélien il est distingué.

$\dfrac{G}{H}$ est un groupe à 4 éléments $(24/6 = 4)$ et la classe de $(\bar{1},\bar{0})$ est d'ordre 4 dans $\dfrac{G}{H}$ donc $\dfrac{G}{H}$ est isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$,

D04 Goupe et action de groupe

Controle du 29 Mars 2007

(durée 30 minutes)
Tous documents et calculatrices interdits

NOM ET PRENOM

Question de cours : (1 point)

1) Soit G un groupe opérant sur un ensemble X. Si x appartient à X donner la définition de l'orbite de x.

2) Si G est un groupe finidont l'ordre est divisible par p entier premier, donner la définition d'un p-Sylow de G.

Exercice 1 : (3 points)

Soit G un groupe fini d'ordre 10. On suppose G **non commutatif**

1) Montrer que le centre de G est réduit à $\{e\}$ si e est l'élément neutre de G.

(Indication : Considérer le quotient $\dfrac{G}{Z(G)}$ où $Z(G)$ est le centre de G et utiliser une proposition du cours que l'on énonçera sans démonstration)

2) On fait agir G sur G par conjuguaison donc $G \times G \to G, (g, h) \to ghg^{-1}$.

Pour cette action combien y a t'il d'orbites ?

Quel est l'ordre des éléments de ces orbites ? (Considérer les stabilisateurs)

Combien G posséde t'il d'éléments d'ordre 2, et d'ordre 5 ?

Exercice 2 : (2 points)

Soit G un groupe fini d'ordre 10. On suppose que G est **commutatif**

En utilisant les théorémes de Sylow et les remarques faites en cours pour l'utilisation de ces théorémes, à quel groupe connu G est-il isomorphe ? (Justifier a réponse)

Exercice 3 : (3 points)

1) Quel est l'inverse de $\bar{2}$ dans $(\dfrac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}})^{\times}$, ensemble des éléments inversibles de $\dfrac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}}$ pour la multiplication.

2) Un groupe G d'ordre $323 = 17 \times 19$ opére sur un ensemble X de 107 éléments . Montrer qu'il existe au moins un point fixe. (Indication : Supposer qu'il n'existe pas de points fixes et remarquer, par exemple que 107 modulo $17 = 5$)

Correction du contrôle du 29 Mars 2007

Exercice 1 : (3 points)
Solution :
1) $Z(G)$ est un sous-groupe de G donc d'ordre 1,2,5,ou 10. Comme G est non commutatif on a $Z(G) \neq G$ donc $|Z(G)| \neq 10$ et si $|Z(G)| = 2$ ou 5 alors $\dfrac{G}{Z(G)}$ est d'ordre 5 ou 2, soit des entiers premies, donc cyclique. Utilisant le théoréme du cours G serait commutatif. donc $|Z(G)| = 1$.
2) Par la formule des classes on a donc, 15 = 1 + 5u + 2v, si u et v sont les nombres d'orbites à 2 (restivement 5) éléments donc des entiers positifs ou nuls. Soit donc 14 = 2u + 5v, ce qui implique que $u = 2$ et $v = 2$. Donc on a 5 orbites.
Si un élément, h, appartient à une orbite de 2 éléments alors son stabilisateur G_h est un groupe à $10/2 = 5$ éléments et comme $h \in G_h$ h est d'ordre 5 donc on a 10 éléments d'ordre 5. De m Řme on a 4 éléments d'ordre 4. (N'oublions pas que les orbites sont disjointes deux à deux puisque ce sont dees classes d'équivalence).

Exercice 2 : (2 points)
Comme G est commutatif G est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow. (Théoréme du cours). Or $10 = 2 \times 5$ donc si S_2 et S_5 sont les uniques 2-Sylow et 5-Sylow on a G isomorphe à $S_2 \times S_5$ et 2, 5 étant premiers G est isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ soit en utilisant le théoréme chinois $\dfrac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}$.

Exercice 3 : (3 points)
Solution :
1) on trouve $\bar{9}$ car$\bar{2} \times \bar{9} = \bar{1}$ (0,5 point)
2) Supposons que l'action de G sur X soit sans point fixe. Le cardinal de chaque orbite divisant 323 et comme $107 \leq 323$ les orbite ont 17 ou 19 éléments . Rappelons que x est un point fixe si et seulement si son orbite est de cardinal 1. Si u est le nombre d'orbites à 17 éléments et v le nombre d'orbites à 19 éléments, comme on suppose que l'on n'a pas de points fixes on a l'équation $107 = 17u + 19v$ avec u et v entiers positifs. Raisonnant modulo 17 on obtient $\bar{5} = 2\bar{v}$ soit $\bar{v} = \bar{5}\bar{9} = \bar{1}\bar{1}$ donc $v = 17k + 11$, k entier ≥ 0. Donc $19{\times}v \geq 19 \times 11 > 107$. Donc l'équation est impossible et l'hypothése que l'action soit sans point fixe est absurde.