Examen D04, 14 juin 2007
Université Rennes 1
Durée 2H.

Calculatrices interdites. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints.

Exercice 1 :

Soit H et K deux sous-groupes distingués du groupe G. On suppose que $H \cap K = \{e\}$, où e désigne l'élément neutre de G.
1) Montrer que tout élément de H commute avec tout élément de K.
2) Montrer qu'il existe un morphisme de groupe injectif du groupe produit $H \times K$ dans le groupe G.

Exercice 2 :

Soit les deux permutations de S_7, $\alpha = (2,4,6)(1,5,7)$ et $\beta = (2,4)(5,6)$.
1) Quels sont les ordres de α et β ?
2) En déduire que le sous-groupe engendré par α et β a un ordre multiple de 6.

Exercice 3 :

Soit a un élément de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{\times}$, le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et b un élément de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.
1) Montrer que l'application $f_{a,b} : \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \to \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ définie par $f_{a,b}(x) = ax + b$ est une bijection.
2) La question 1) est-elle encore vraie si on suppose seulement que a appartient à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$? (On justifiera la réponse)
3) Montrez que l'ensemble E de ces transformations

$$E = \left\{ f_{a,b} \ : a \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{\times}, b \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \right\},$$

est un groupe lorsque l'on le muni de la loi de composition des applications.
4) Montrez que

$$F = \left\{ f_{1,b} \ : \ b \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \right\},$$

est un sous-groupe distingué de E. A quel groupe est isomorphe le groupe quotient E/F ? On explicitera l'isomorphisme.

Exercice 4 :

Soit G un groupe d'ordre $77 = 7 \times 11$.
1) Déterminez le nombre d'éléments de G d'ordre 7, puis le nombre d'éléments d'ordre 11.
2) En déduire que G est cyclique.
3) En déduire le nombre d'entiers inférieurs à 77 et premiers avec 77.

Exercice 5 :

Soit G le groupe $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}}$.
1) Si H est le sous-groupe de G engendré par $(1,3)$, quel est l'ordre de H ?
2) Quel est l'ordre de **la classe de** (2,10) **dans** $\frac{G}{H}$ **?**

En déduire à quel groupe connu est isomorphe $\dfrac{G}{H}$.

Exercice 6 :

Soit G un groupe opérant sur l'ensemble E par $G \times E \to E : (g, x) \to g.x$. Si X est un sous-ensemble de E on note

$$G_X = \{g \in G : \forall x \in X, g.x = x\},$$

et

$$G'_X = \{g \in G : gX = X\},$$

où $gX = \{g.x : x \in X\}$.
1) Montrer que G_X et G'_X sont des sous-groupes de G, puis que G_X est un sous-groupe distingué dans G'_X.
2) Montrer que si h appartient à G alors $G_{hX} = hG_X h^{-1}$ et $G'_{hX} = hG'_X h^{-1}$.
3) Soit x élément de E et X **l'orbite** de x pour l'action de G sur E.
a) Montrer qu'alors G_X est distingué dans G. (Indication : On pourra montrer que G_X est le noyau d'un morphisme de G dans S_X, groupe des permutations de X).
b) Montrer que $\dfrac{G}{G_X}$ est isomorphe à un sous-groupe de S_X.