Dans toute la suite le plan Euclidien est muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et les équations sont données dans ce repère.

Etude de la conique $\mathcal{C}$: $13x^2 - 32xy + 37y^2 = 5$

Il est claire que O est centre de symétrie et donc que dans un repère $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ l'équation de $\mathcal{C}$ sera de la forme $\alpha x^2 \pm \beta y^2 = k$ (*). Les deux vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ étant les vecteurs directeurs des axes.

Le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est déduit du repère $\mathcal{R}$ par une rotation d'angle θ et centre O.

Si M est un point de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ et (X, Y) dans $\mathcal{R}'$ alors on a

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta \text{ et } y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

L'équation de la conique dans $\mathcal{R}'$ s'obtient alors par ces changements de coordonnées. D'autre part vu (*) le coefficient du terme en XY doit etre nul ce qui nous donne

$2\tan^2\theta + 3\tan\theta - 2 = 0$ soit $\tan\theta = 2$ ou $\tan\theta = 1/2$.

Par suite les deux axes de symétries sont les droites d'équation dans $\mathcal{R}$ $y = 1/2x$ et $y = -2x$.

Comme on connait $\tan\theta$ avec $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ on en déduit $\cos\theta$ et $\sin\theta$ soit l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ à savoir $X^2 + 9Y^2 - 1 = 0$.

On a donc une ellipse.

Bien sur on retrouve ce résultat en calculant les vecteurs propres de la matrice de la forme quadratique. Ces vecteurs sont des vecteurs directeurs des axes de symétrie, la forme de l'équation dans le repère formé par les axes étant $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = k$ λ_1 et λ_2 étant les deux valeurs propres.

Etude de la conique $\mathcal{C}$: $2x^2 + 3xy + y^2 - 4x - 5y = 0$

Etudions d'abord si la conique est à centre. Ce qui est le cas car la forme quadratique $q(X) = 2x^2 + 3xy + y^2$ est non dégénérée. Soit Ω de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère $\mathcal{R}$ ce centre.

Deux méthodes pour le trouver.

Soit on utilise le fait que c'est un extremum de la forme $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 4x - 5y$ et donc que (x_0, y_0) est solution du systéme $f'_x = 0, f'_y = 0$ soit

on remarque que l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est inchangéee par le changement de x en $-x$ et y en $-y$ donc ne doit pas comporter de termes en x et y. Or l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est obtenue par la translation du vecteur de coordonnées (x_0, y_0).

On trouvera que $4x_0 + 3y_0 - 4 = 0, 3x_0 + 2y_0 - 5 = 0$ donc $\Omega = (7, -8)$ et l'équation de l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donc

$$2x^2 + 3xy + y^2 + 6 = 0$$

Donc reprenant les mêmes arguments que dans l'exercice précédent il existe un repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ dans lequel l'équationde la conique sera de la forme $\alpha x^2 \pm \beta y^2 = k$ (*). Les deux vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ étant les vecteurs directeurs des axes.

Le repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est déduit du repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par une rotation d'angle θ et centre Ω.

Ici deux possiblités soit on utilise la théorie des formes quadratiques (donc valeurs propres et vecteurs propres) soit on opère comme dans l'exercice précédent.

La théorie des formes quadratiques nous permet de donner sans trop de calculs la nature de la conique. En effet le polynôme caractéristique de la matrice de la forme quadratique est $\lambda^2 - 3\lambda - 1/4$ et donc admet deux racines de signe opposés c'est à dire que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ l'équation de la conique sera de la forme $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = k$ avec $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (ce qui revient à dire que la forme quadratique est de signature $(1,1)$). On a donc affaire à une hyperbole.

Le lecteur pourra pour l'exercice précédent faire la même remarque et décider que la conique cherchée était une ellipse.

Reprenant la méthode de l'exercice précédent :

Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la conique a pour équation : $2x^2 + 3xy + y^2 + 6 = 0$ et avec les changements de coordonnées

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta \text{ et } y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

On trouve en annulant le coefficient du terme en XY : $3\tan^2\theta + 2\tan\theta - 3 = 0$. soit $\tan\theta = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{3}$ ou $\tan\theta = \dfrac{-1-\sqrt{10}}{3}$.

et par suite que l'équation de la conique dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est

$$(\sqrt{10}+3)X^2 - (\sqrt{10}-3)Y^2 = -12$$

soit encore pour trouver les asymptotes :

$$\frac{X^2}{12(\sqrt{10}-3)} - \frac{Y^2}{12(\sqrt{10}+3)} = -1$$

Par suite $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ les équations des asymptotes sont

$$Y = \pm(\sqrt{10}+3)X$$

Etude de la conique $\mathcal{C}$: $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$

La forme quadratique est dégénérée donc elle est le carrée d'une forme linéaire l_1 à savoir $l_1(x,y) = 3x - 4y$. Donc l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme $l_1(x,y) + l(x,y) = -50$. Comme l_1 et l sont deux formes indépendantes la conique est une parabole.

On construit une base orthonormée de la facon suivante :

Prenons un vecteur unitaire de la droite $l_1(x,y) = 0$ par exemple le vecteur $\overrightarrow{I} = (4/5, 3/5)$ (quii donc sera un vecteur directeur de l'axe) et un vecteur $\overrightarrow{J}$ unitaire orthogonal à $\overrightarrow{I}$ par exemple le vecteur de coordonnées $(-3/5, 4/5)$.

Dans ce nouveau repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ l'équation sera

$$(Y-1)^2 = X - 1$$

(On utilise les changements de coordonnées $x = 4/5X - 3/5Y, y = 3/5X + 4/5Y$.

C'est donc la parabole de sommet $S = (1,1)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.