Les coniques : Le point de vue forme quadratique

On peut voir les coniques de plusieurs façons soit comme des sections planes d'un cône de révolution (III^e siécle avant J.C) soit sous forme analytique comme des courbes du second degré (Descartes) soit encore sous un aspect projectif (Desargues et Pascal).

Nous exposerons ici l'aspect analytique en faisant le rapport avec les formes quadratiques.

I :Un petit rappel sur les formes quadratiques

Dans toute la suite nous considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur le corps $\mathbb{R}$. Bien entendu ceci est restrictif mais le but étant les coniques nous nous limitons à la dimension 2.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui se met sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées du vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Si f est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$, alors q définie par $q(x) = f(x, x)$ est une forme quadratique, dite la forme quadratique associée à f .

Remarque : On a $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, ce qui prouve que q n'est pas linéaire !

Réciproquement à toute forme quadratique on peut associer une forme bilinéaire symétrique.

Dans toute la suite par F.B.S il faut entendre forme bilinéaire symétrique.

LA NOTION DE MATRICE ET DE NOYAU D'UNE F.B.S :

Soit (e_1, e_2) une base de $\mathbb{R}^2$ et f une F.B.S sur $\mathbb{R}^2$. A cette forme nous pouvons associer une applicaton linéaire f^* de $\mathbb{R}^2$ dans $(\mathbb{R}^2)^*$ (le dual de $\mathbb{R}^2$ donc l'ensemble des formes linéaires définies sur $\mathbb{R}^2$) par

$$x \xrightarrow{f^*} f_x \text{ où } f_x : y \longrightarrow f(x, y)$$

$(\mathbb{R}^2)^*$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Il peut en effet etre muni de la base (e_1^*, e_2^*) formes linéaires définies par $e_i^*(e_j) = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$. Cette base étant dite base duale de la base (e_1, e_2).

Si donc nous munissons $\mathbb{R}^2$ de la base (e_1, e_2) et $\mathbb{R}^2$ de la base duale (e_1^*, e_2^*) l'application liinéaire f^* posséde une matrice M que nous appelerons matrice de la F.B.S f. Il s'agit donc de la matrice suivante :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

En particulier on a $f(x, y) =^t XMY$.

Soit q une forme quadratique. La matrice de l'unique F.B.S, f, vérifiant $q(x) = f(x, x)$ est dite matrice de q.

Bien entendu la F.B.S associée à la forme quadratique q n'est pas en général un produit scalaire cependant on peut généraliser la notion **d'orthogonalité** de la facon suivante :

Nous dirons que deux vecteurs u et v sont orthogonaux poour la F.B.S f si $f(u,v) = 0$ et si F est un sous-espace vectoriel on appellera orthogonal de F noté $F^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs u tel que $f(u,v) = 0$ pour tout v de F.

Bien entendu f n'étant pas en général un produit scalaire on perd beaucoup de propriété des espaces euclidiens. Par exemple l'espace E n'est pas forcement la somme directe de F et de $F^{\perp}$ et un vecteur u peut être orthogonal à lui-même.

Ceci nous améne à définir la notion de noyau d'une forme quadratique q noté $Ker(q)$ par $Ker(q) = E^{\perp}$. Si $Ker(q) \neq \{0\}$ on dit que q est **dégénérée.**

On montre assez facilement que $Ker(q) = \{X \in E / MX = 0\}$ où M est la matrice de q.. Il en résulte que q est non dégénérée si M est inversible.

Le lecteur s'apercevra que q non dégénérée signifie que l'application f^* définie à partir de la F.B.S associée à q est bijective.

LA NOTION DE BASE OTHOGONALE ET LA SIGNATURE

Comme nous avons la notion d'horthogonalité nous pouvons essaye de généraliser la notion de base ortogonal vu dans les espaces euclidiens.

Si donc q est une forme quadratique et f sa forme B.L.S associée il est naturel de poser qu'une base e_1, e_2 de E est orthogonale si $f(e_1, e_2) = 0$. IL est évident que ceci est équivalent à dire que la matrice de q dans cette base est diagonale et donc que dans cette base $q(x) = q(e_1)x_1^2 + q(e_2)x_2^2$ si $x = (x_1, x_2)$.

On montre qu'il existe toujours une base orthogonale. Cette affirmation étant la conséquence du théorème suivant de décomposition en "somme" de carrés :

Toute forme quadratique peut s'écrire sous la forme $q(x) = a_1 l_1^2(x) + a_2 l_2^2(x)$ où l_1 et l_2 sont deux formes linéairements indépendantes.

Terminons par le fait que cette décomposition n'est pas unique mais que par contre le couple (s,t) où s est le nombre de $a_i > 0$ et t le nombre de $a_i < 0$ est unique. Ce couple s'appelle la signature de q.

Nous passons maintenant à l'étude pratique d'une conique : Bien entendu toutes les "recettes" exposées ci-dessous ne sont que des conséquences de la théorie rappellée ci-dessus.

II : ETUDE PRATIQUE D'UNE CONIQUE

On étudie une conique (C) donnée par son équation dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ donc de la forme $q(x,y) + l(x,y) = k$ où q est une forme quadratique et l une forme linéaire.

CAS DE LA FORME QUADRATIQUE NON DEGENEREE

On sait donc que $det(M) \neq 0$ si M est la matrice de q et que (C) posséde un centre de symétrie $\Omega(x_0, y_0)$ qui est un extremum de la forme $f(x, y) = q(x, y) + l(x, y)$.

L'équation de (C) dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sera de la forme $q(X, Y) = k'$ que l'on peut trouver en faisant le changement de variables $x = X + x_0$ et $y = Y + y_0$.

On calcule les valeurs propres de M. Il existe donc une base orthonormée formé par les vecteurs propres $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}$.

Deux cas sont possibles :

Premier cas : On a une seule valeur propre λ. L'équation de (C) sera dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ $x^2 + y^2 = \dfrac{k'}{\lambda}$ et donc (C) sera soit un cercle, soit un point, soit vide.

Second cas : On a deux valeurs propres λ_1 et λ_2. L'équation de (C) sera dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k'$.

Si q a pour signature (2,0) (donc $\lambda 1$ et $\lambda 2$ positifs) alors (C) est soit vide ($k' < 0$) soit un point ($k' = 0$) soit une ellipse ($k' > 0$).

Si q a pour signature (1,1) et $k' = 0$ alors (C) est constitué de la réunion de deux droites et sinon (C) est une hyperbole.

Les axes d'une ellipse ou d'une hyperbole sont les droites passant par le centre de symétrie et de direction les deux vecteurs propres.

L équations d'une ellipse rapportée à ses axes est donc de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et pour une hyperbole de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ les asymptotes d'une hyperbole sont les deux droites $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$

CAS DE LA FORME QUADRATIQUE DEGENEREE

On sait donc que $det(M) = 0$ si M est la matrice de q et que par suite (quitte à changer q en $-q$) la forme quadratique q est le carré d'une forme linéaire l_1 donc léquation de (C) est de la forme $(l_1(x, y))^2 + l_2(x, y) = k$

Deux cas sont possibles :

Les deux formes linéaires sont liées : $l_2 = 2\lambda l_1$

On a donc que le point (x,y) $\in (C)$ si et seulement si $(l_1(x, y) + \lambda)^2 = k + \lambda^2$.

(C) est donc soit vide si $k + \lambda^2 < 0$ soit une droite si $k + \lambda^2 = 0$ soit deux droites parallèles si $k + \lambda^2 > 0$.

Les deux formes linéaires sont indéndantes :

(C) est une parabole dont l'équation dans un repère orthonormé $(S, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est de la forme $x^2 = 2py$. S étant le sommet de la parabole et son axe étant dirigé par $\overrightarrow{J}$ et passant par S.

Comment trouver ce repére ?

On sait qu'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ formant une base tels que $l_1(x, y) = \overrightarrow{w_1}$ et $l_2(x, y) = \overrightarrow{w_2}$. cette base n'est pas orthogonale donc parle procédé d'hotogonalisation de Gram-Schmidt on fabrique une base orthogonale $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ et la base $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est obtenue par normalisation.

On a donc la relation $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} + 2\lambda\overrightarrow{v_1}$. Le sommet S est le point tel que $< \overrightarrow{OS}/\overrightarrow{v_1} >= -\lambda$ et $< \overrightarrow{OS}/\overrightarrow{v_2} >= k + \lambda^2$.

III : EXERCICES SUR LES CONIQUES

La solution de certains des exercices proposés sera mise sur le site mais plus tard apres les TD

EXERCICE 1 (Cet exercice vu l'énoncé ne suppose aucun connaissance de la théorie sur les coniques)

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et la courbe (C) d'équation

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

1) Montrer que cette courbe posséde un centre de symétrie Ω et donner son équation dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

2) Montrer que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la première bissectrice Δ est axe de symétrie.

3) On considère le repère orthonormé direct $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ où $\overrightarrow{I}$ est un vecteur unitaire de Δ. Donner l'équation de (C) dans ce repère.

4) Montrer que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la seconde bissectrice Δ' est axe de symétrie.

Donner les équations de Δ et Δ' dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Sachant que (C) est une ellipse tracer (C) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

EXERCICE 2

Reprendre l'exercice 1 mais en utilisant la théorie des formes quadratiques et leur application aux coniques. Notamment retrouver les axes de (C).

EXERCICE 3

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et la courbe (C) d'équation

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$$

1) Montrer que cette courbe posséde un centre de symétrie Ω et donner son équation dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

2) En déduire que (C) est la réunion de deux droites dont on donnera les équations dans le rèpere $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

EXERCICE 4

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et la courbe (C) d'équation

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 10 = 0$$

1) Verifier que O est un centre de symétrie. Trouver une base orthonormale tel que l'équation de (C) soit de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, bréels).

2) Donner l'équation des asymptotes de (C) et tracer (C) dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

EXERCICE 5

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et la courbe (C) d'équation

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - y - 1 = 0$$

1) Montrer que (C) est une parabole.

2) Trouver un repère orthonormé $(S, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ tel que (C) ait une équation de la forme $x^2 = 2py$ dans ce repère.

EXERCICE 6

On considére le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Meme questions que l'exercice 5 si (C) a pour équation

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$$

On devra trouver que dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le sommet a pour coordonnées $(0, 1)$ *et pour axe la droite* $y = x + 1$.

EXERCICE 7

Etudier les coniques suivantes dont les équations sont données dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

On précisera suivant la nature le centre, les axes, le sommet et les asymptotes.

a) $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$.

On trouvera une hyperbole de centre $(2, 3)$ *dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et d'équation réduite (donc rapportée à ses axes)* $3x^2 - 7y^2 = 4$.

b) $2x^2 + xy + y^2 + 4x - y - 2 = 0$

On trouvera une ellipse de centre $(\frac{-9}{7}, \frac{8}{7})$ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et d'équation réduite (donc rapportée à ses axes) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{3-\sqrt{2}}{2}y^2 - \frac{36}{7} = 0$

EXERCICE 6

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et la courbe (C) d'équation

$$sqrt3x^2 + 6xy + \sqrt{3}y^2 + 2(\sqrt{3} - 6)x - 2(3 + \sqrt{3})y + 1 = 0$$

1) Montrer que cette courbe posséde un centre de symétrie Ω et donner son équation dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

2) Montrer que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la droite Δ d'équation $y = \sqrt{3}x$ est axe de symétrie.

3) On considère le repère orthonormé direct $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ où $\overrightarrow{I}$ est un vecteur unitaire de Δ. Donner l'équation de (C) dans ce repère.

4) Montrer que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la perpendiculaire Δ' à Δ est axe de symétrie.

5) Sachant que (C) est une hyperbole dessiner graphiquement (C) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.