Nous étudierons successivement la parabole, puis les deux coniques à centre l'ellipse et l'hyperbole.On a choisi volontairement de raisonner de façon géométrique

La Parabole

Définition :

On appelle parabole l'ensemble des points M du plan équidistants d'une droite fixe (D), dite **directrice** et d'un point fixe F, n'apppartenant pas à (D) dit **foyer** .

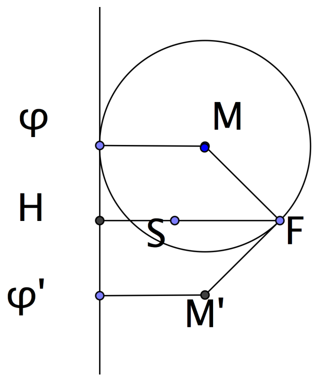
Si H est la projection orthogonale du point F, foyer de la parabole, sur la droite (D) la distance $FH = p$ est dit **paramètre** de la parabole .

Axes et sommets de la parabole :

La droite (FH) est axe de symétrie de la parabole.

En effet si M' est le symétrique du point M de la parabole par rapport à la droite FH, ϕ la projection orthogonale de M sur (D) et ϕ' la projection orthogonale de M' sur (D), on a $MF = M'F'$ et $M\phi = M'\phi'$. On dit que c'est **l'axe focale**

Un point S du segment $[FH]$ appartient à la parabole si et seulement si $SH = SF$. C'est donc le milieu de $[FH]$. Ce point est appelé **sommet** de la parabole.



Construction par points et autre définition :

Soit φ un point de la directrice et (Δ) une droite perpendiculaire à la droite (D) en φ. Il existe un unique point M de (Δ) tel que $M\varphi = MF$, intersection de (D) et de la médiatrice de $[F\varphi]$. En faisant varier φ sur (Δ) on construit point par point la parabole.

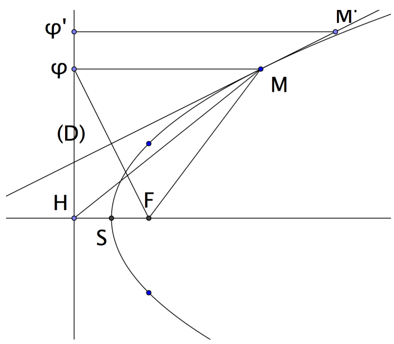
Il est évident que la parabole est aussi l'ensemble des centres des cercles tangents à (D) et passant par le point fixe F.

Tangente en un point à la parabole :

a) Soit M un point de la parabole (P), de foyer F et de directrice (D). Si φ est le projeté orthogonal de M sur (D) alors la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MF})$ est la tangente à la paraboole (P). C'est aussi la médiatrice du segment $[F\varphi]$.

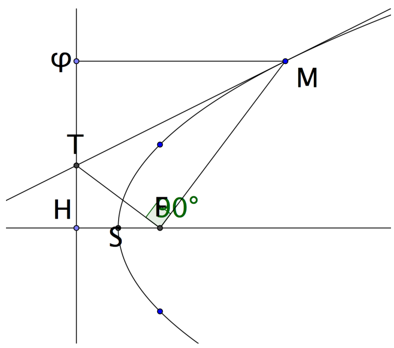
Soit (δ) la bisssectrice intérieure de l'angle (MH, MF). Comme le triangle $M\varphi F$ est isocéle (δ) est aussi la médiatrice de $[F\varphi]$.

Soit M' un autre point de $\delta \cap (P)$. On veut montrer que $M' = M$ (car la droite (δ) ne doit couper la parabole qu'en un seul point). Supposons donc que $M \neq M'$. Si φ' est le projeté orthogonal de M' sur (D) alors, par Pythagore, on a $HM'^2 = M'\varphi'^2 + \varphi' H^2$. Or $H' \neq H$ donc $\varphi' M' < HM'$ et comme $HM' = M'F$ on obtient $FM' > M'\varphi'$ donc M' n'apparient pas à la parabole, ce qui contredit l'hypothése.



b) La tangente en un point M de la parabole coupe la directrice en un point T tel que l'angle $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FT})$ soit un angle droit.

T et M appartiennent à la tangente donc par a) $TF = T\varphi$ et $M\varphi = MF$.Comme l'angle $(\overrightarrow{\varphi M}, \overrightarrow{\phi T})$ est droit $TM^2 = \varphi M^2 + HT^2$ et donc $TM^2 = TF^2 + MF^2$ soit par la réciproque de Pythagore le triangle TFM est rectangle en F.



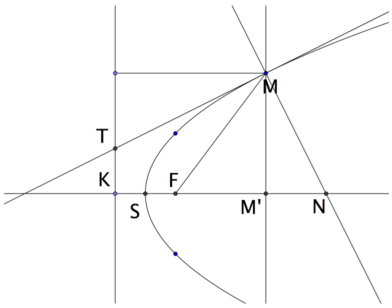
Application : Les miroirs paraboliques

Si on fait se réfléchir sur un miroir parabolique un faisceau de rayons parallèles et si l'axe de la parabole est orienté dans la direction de ce faisceau alors, par réflexion, tous les rayons convergent vers le foyer. Utilisation des fours solaires ou des antennes paraboliques.

Normale en un point

La normale en un point M d'une parabole coupe l'axe focal en un pont N tels que les segments $[KF]$ et $[MN]$ aient des projections sur l'axe focal de même longueur.

Soit M' le projeté orthogonal de M sur l'axe focal. $HFMK$ et un parallélogramme donc les deux triangles KMF et $M'MN$ sont isométriques soit $M'N = KF$.



Exercices sur la parabole géométriques

Exercice 1 :

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R. On considére les cercles (ω) qui coupent (C) sous un angle α et qui passent par un point fixe F tel que $FO = Rcos(\alpha)$ Montrer que les cecles (ω) sont tangents à une droite fixe et que leurs centres appartient à une parabole.

Exercice 2 :

Soit (P) une parabole. On note par N l'intersection de la normale en un point M de (P) avec l'axe focal et par T l'intersection de la tangente en M avec l'axe focal.

a) Montrer que le sommet S est le milieu de $[mT]$, ($[mT]$ est appelé sous-tangente), si m est le projeté orthogonal de M sur l'axe focal.

b) Montrer que la longueur $mN = p.$, p étant le paramétre de (P)

c) On suppose que M et T sont fixes et que la parabole (P) est variable. Trouver l'ensemble des foyers des paraboles.

Exercice 3 :

Soit (D) une droite fixe et K un point fixe non situé sur (D). On note par (P) toute parabole passant par K et admettant (D) pour directrice.

a) Montrer que l'ensemble des foyers F est un cercle (C), à l'exception d'un point H de ce cercle.

b) Donner le foyer F si la parabole passe par un point M donné distinct de K. Discuter suivant la position de M.

Exercice 4 :

Quel est l'ensemble des foyers d'une parabole tangente aux trois cotés d'un triangle ABC donné.

Exercice 5 :

Construire une tangente commune à deux paraboles ayant même foyers et de directrices sécantes.

Exercice 6 :

Soit (P) unne parabole de foyer F. Si M est un point de (P) et T, N eles points où la tangente et la normale en M coupe l'axe focal, montrer que $FM = FT = FN$.

Equations de la parabole et de ses tangentes

Equation de la parabole rapportée à son axe et sa tangente au sommet :

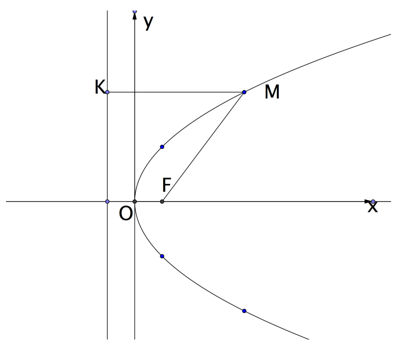
Soit (P) la parabole d foyer F de directrice (D) et de paramétre p. On considére le repère directe d'origine O, sommet de (P) d'axes Ox, axe focale orienté de O vers F et Oy paralléle à la directrice.

Dans ce repère F a pour coordonnées $(p/2, 0)$ et la directrice pur équation $x = -p/2$. Si donc K est la projecton orthogonal de M, point de (P), sur (D) comme

$MF = MK \iff MF^2 = MK^2 \iff MF^2 - MK^2 = 0 \iff (x - p/2)^2 + y^2 - (x + p/2)^2 = 0$ on obtient :

$y^2 = 2px$

Si nous intervertissons les deux axes on a l'équation $y = 1/2px^2$



Equation de la tangente en un point :

La parabole d'équation $y^2 = 2px$ admet au point (x_0, y_0) une tangente dont l'équation est $y_0 y - p(x - x_0) = 0$.

Exercice sur la parabole avec équations

Exercice 1 :

Soit la parabole (P) de foyer F et de directrice (D). Une sécante,passant par F, coupe (P) en M et M'. Montrer que le milieu du segment $[MM4]$Û appartient à une parabole fixe.

Exercice 2 :

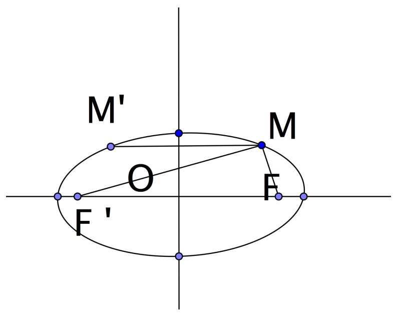
Reprendre les exercices géométriques et les résoudre en utilisant les équations

Les coniques à centre

Nous partirons avec le point de vue bifocale et démontrrons l'équivalence des définitions par directrice et foyers. Nous verrons successivement l'ellipse puis l'hyperbole.

L'ellipse

Définition :
Soit F et F' deux points du plan tels que $FF' = 2c$, c réel positif. L'ellipse de **foyers** F et F' est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$, a rél donné et a $>$ c.



Axes de symétrie
La droite (FF') est un axe de symétrie ainsi que la médiatrice du segment $[FF']$ et le point O, intersection de ces deux axes est centre de symétrie.
Soit M un point de l'ellipse et M' son symétrique par rapport à la droite (FF') donc $MF = M'F$ et $MF' = M'F'$ et par suite si M appartient à l'ellipse M' est aussi un point de l'ellipse.
Pour la médiatrice il suffit de considérer le symétrique du point M comme auparavant.
Les intersections de l'ellipse et de ses axes de symétries sont appelés **sommets** et les deux axes **grand axe,**pour (FF') et **petit axe**

Constructions point par point

La construction dite du jardinier :

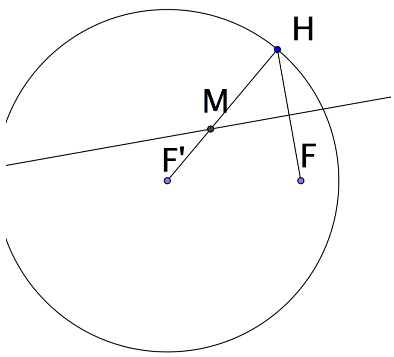
Elle consiste à tendre une ficelle de longueur 2a entre deux piquets espacés de la longueur 2c et de tourner autour des piquets, la ficelle tendue. Cette construction est une conséquence de la définition.

La construction par cercle directeur : L'algorithme de construction

Tracer le cercle (C) de centre F' et de rayon 2a

Tracer un rayon $[F'H]$

Tracer la médiatrice du segment $[FH]$ qui coupe $[F'H]$ en un point M qui est un point de l'ellipse de foyers F et F'

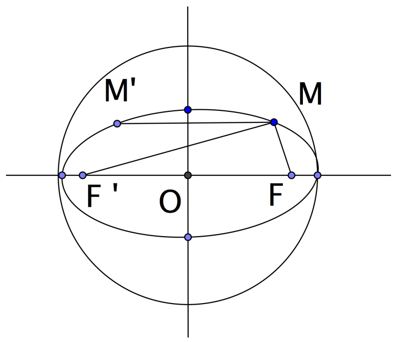


Justification : *Supposons l'ellipse de foyers* F *et* F' *construite tels que* $[FF'] = 2a$ *et soit* M *un point de l'ellipse. Prolongeons F'M de la longueur FM. On obtient un point* H *tel que* $F'H = FM + MH = FM + FM = 2a$ *donc* H *appartient au cercle de centre* F' *de rayon 2a et comme* $MH = MF$ M *est sur la médiatrice de* $[HF]$.

Réciproquement Comme $FF' = 2c$ *et que* $c < a$ *le point* F *est intérieur au cercle* (C) *donc la médiatrice de* $[FH]$ *coupe* (FH) *en un point* M *situé entre* F' *et* H *et* $MF + MF' = MF + MH = 2a$.

Le cercle (C) est dit **cercle directeur associé au foyer** F'

On a aussi **le cercle principal** qui est le cercle de centre O, centre de l'ellipse, et de rayon a.



Résumons ce que nous savons pour l'instant sur les distances :

La distance entre les deux foyers est 2c, entre les deux sommets est 2a et la distance du centre à un sommet B situé sur le petit axe est donné par x tel que $a^2 = c^2 + x^2$ car OBF est rectangle isocéle.

Exercices géométriques sur l'ellipse

Exercice 1 :

Determiner une ellipse connaissant son foyer F, un sommet B du petit axe et un point M de cette ellipse.O n discutera suivant la position de M par rapport à une autre ellipse

Exercice 2 :

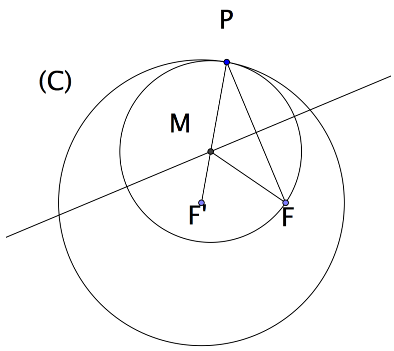
Quel est l'ensemble des foyers d'une ellipse passant par un point M donné et admettant même cercle principal de centre O, de rayon a ?

Existence de la tangente en un point donné

La méthode géométrique :

Soit l'ellipse de foyers F et F' et (C) le cercle directeur relatif au foyer F'. Rappelons que c'est le cercle de centre F' et de rayon 2a. Soit M un point de l'ellipse. On considére le cercle de centre M de rayon la longueur de $[MF]$. Ce cercle intersecte (C) en P. La médiatrice, Δ, du segment $[FP]$ est la tangente en M à l'ellipse.

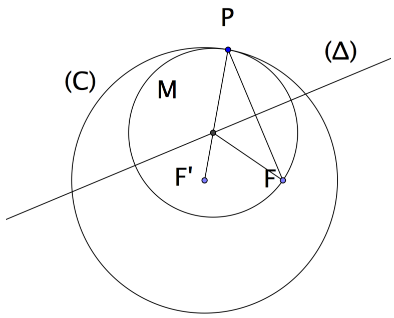
Avant de justifier ce qui précéde remarquons que l'ellipse de foyers F et F' qui a pour cercle directeur (C) relatif au foyer F' peut être considéré comme l'ensemble des centres des cercles de centre M, passant par F et tangents à (C). (cf la figure ci dessous)



justifcation de l'existence

Soit D la perpendiculaire en P à $[MP]$ donc la tangente en P au cercle directeur (C). Consi dérons un point M' de Δ appartenant à l'ellipse et suposons que $M' \neq M$. On doit démontrer que ceci est absurde.

Comme M' appartient à Δ, médiatrice de $[FP]$ on a $MF = MP$ et comme M appartient aussi à l'ellipse il existe un cercle de centre M qui passe par F et qui est tangent au cercle (C). Le point P est donc le point de tangence de ces deux cercles. M' est donc à l'interrsection de Δ et de la droite $(M'P)$ donc $M' = M$ ce qui est absurde.



Retenons donc que la tangente à l'ellipse s'obtient en tracant le cercle directeur relatif à F', par exemple. La droite $(F'M)$ coupe le cercle en$P$. La tangente en M est alors la médiatrice du segment $[PF]$.

Propriétés de la tangente en un point donné :

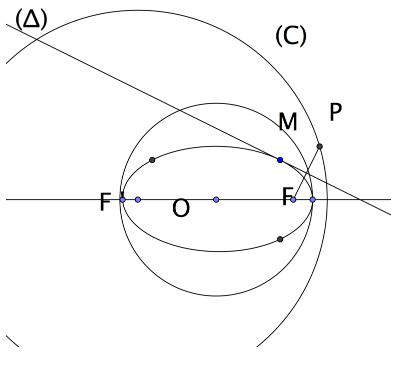
Les propriétés suivantes sont souvent des conséquences directes de la démonstration précédente.

P1) La tangente en un point M est aussi la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

Il suffit de remarquer que le triangle FMP est isocèle en M.

P2) Pour qu'une droite Δ soit tangenteà une ellipse il faut et il suffit que le symétrique d'un foyer se trouve sur le cercle directeur relatif à l'autre foyer.

En effet soit H le projeté orthogonal de F sur la tangente (Δ). Par construction (cf ci dessus) la droite (FH) coupe le cercle directeur relatif au foyer F' en un point P et (Δ) est la médiatrice du segment $[FP]$. Donc si nous considérons l'homothétie de centre F et de rapport $1/2$ le point F' est trasformé enle point O cetre de l'ellipse et le point P en le point H. Cette même homothétie transforme donc le cecle directeur relatif à F' en le cercle de centre O et de rayon a soit le cercle principal auquel H appartient.

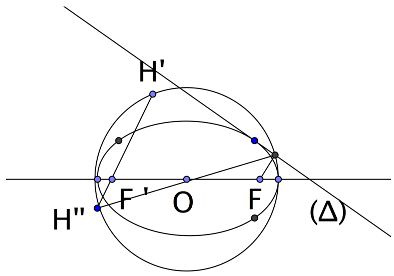


P3) L'ensemble des projections des foyers d'une ellipse sur les tangentes à cette courbe est le cercle principal de l'ellipse.

C'est une conséquence immédiate de P2.

P4) Pour qu'une droite Δ soit tangente à l'ellipse il faut et il suffit que le produit des mesures algébriques des foyers à la droite Δ soit egal au carré du demi petit axe de l'ellipse.

Soit N et H' les projections de F et F' sur la droite Δ tangente à l'ellipse en un point M. La droite (FH) coupe le cercle principal en un point H'' qui est diamétralement opposé à H'. (Le triangle $H''HH'$ est rectangle). En évaluant a puiissance du point F par rapport au crecle (O) on obtient $\overline{FH}.\overline{FH''} = FO^2 - a^2 = c^2 - a^2 = -b^2$.



Réciproquement : Soit Δ une droite telle que H et H' étant les projetés orthogonaux des foyers F et F' de l'ellipse on ait $\overline{FH}.\overline{FH'} = b^2$ (b est la longueur du demi petit axe). On va montrer que Δ est tangente à l'ellipse.

Soit $\overrightarrow{FH''}$ le vecteur symétrique de $\overrightarrow{F'H'}$ par rapport au point O. Le cercle circonscrit au triangle $HH'H''$ a pour centre O. La puissance de ce cercle par rapport à O est donc $\overline{FH}.\overline{FH''}$ = - $\overline{FH}.\overline{F'H'} = -b^2$. *Mais c'est aussi* $FO^2 - OH^2 = -b^2$. (**Voir en fin dans les annexes la section speciale sur la puissance d'un point)** Il en résulte que le point H est sur le cercle principal et on conclue par P4.

P5) Tout point d'une tangente à l'ellipse, autre que le point de contact, est extérieur à l'lelipse

Exercices avec les tangentes de l'ellipse

Exercice 1 :

Connaissant les cotés a,b,,c du triangle ABC calculer les produitsdes distances de B et C à la bissectrice extérieur de l'ange en A. !Faire intervenir une elipse passant par A, B, C.

Exercice 2 :

Soit une ellipse de foyers F et F', de centtre O. On pose $FF' = c, OF = a, e = c/a$ Soit M un point de (E), T et N les points où la tangente et la normale coupent l'axe FF' et I le centre du cercle inscrit dans le triangle MFF'.

Montrer que $NF/MF = IN/IM = e$ et que $\overline{ON}.\overline{PT} = c^2$.

Exercice 3 :

Soit trois points A, B, C tels que B appartienne à $[A, C]$.On considère un cercle (C) tangent M à la droite (AC). De A et B on méne les tangentes au cercle (C) qui rencontrent (C) en T et T' (T *not* $= C$). Si N est le point d'intersection de ces tangentes

a) Trouver l'ensemble des points N quand (C) varie.

b) Quel est l'ensemble des projections de A et B dur la médiatrice de $[TT']$?

Equation de l'ellipse rapportée à ses axes

Considérons un repère orthonormé direct dont lÕorigine est le point O,centre de symétrie de l''ellipse et l'axe Ox le grand axe focale. Dans ce repère les deux foyers F et $F\tilde{O}$ ont pour coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. Reste donc à exprimer que l'ellipse est l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) tels que MF + MF' = 2a. On note par r la distance MF, r' la distance MF' et par 2c la distance focale , donc la distance entre les deux foyers. Ceci nous donne les équations successives suivantes :

Considérons la fonction suivante du point M :

$$\mathbf{P = (r + r' + 2a)(r + r' - 2a)(r - r' + 2a)(r - r' - 2a)}$$

On a $P = [(r + r')^2 - 4a^2][(r - r')^2 - 4a^2]$ soit $(r^2 - r'^2)^2 - 8a^2(r^2 - r'^2) + 16a^2$

Or $r^2 + r'^2 = (x - c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2)$ et $r^2 - r'^2 = (x - c)^2 + y^2 - (x + c)^2 + y^2 = -4cx$

on a $P = 16c^2x^2 - 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16a^2 = 16[(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 + a^2(a^2 - c^2)]$

Soit finalement

$$\mathbf{P = 16a^2(a^2 - c^2)(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1)}$$

De cette formule nous tirons pour l'ellipse l'équation cartésienne : En effet on sait que c < a et que P = 0 (un seul membre de P est nul) si et seulement M est un point de l'ellipse. En posant $b^2 = a^2 - c^2, b > 0$ on a donc l'équation générale de l'ellipse à savoir :

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

On remarquera que b^2 désigne le carré de la distance du centre a l'un des sommets se trouvant sur le petit axe.

Figure affine d'un cercle :

Voir dans les annexes la section sur les affinités. **Affinités associant a une ellipse son cercle principal ou secondaire**

Soit (E) une ellipse de garnd axe AA' de longueur 2a, de petit axe BB' de longueur 2b. Son équation,rapportée à ses axe, est donc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1). Distinguons 2 cas :

le cas du cercle principal (C) qui a pour équation $x^2 + y^2 = a^2(2)$. Associons au point M de (E) le point M_1 de (C) de même abscisse que M. Son ordonnée, obtenue par (1) et (2), est $\pm\frac{b}{a}$. Donc le cercle principal est le transformé de l'ellipse par une affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\pm\frac{b}{a}$.

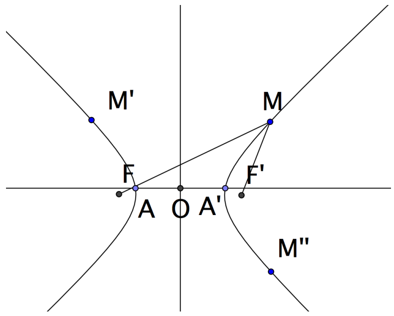
le cas du cercle secondaire (C') qui a pour équation $x^2 + y^2 = b^2(2')$. Associons au point M de (E) le point M_2 de (C) de même ordonnée que M. Son abscisse, obtenue par (1) et (2'), est $\pm\frac{a}{b}$. Donc le cercle principal est le transformé de l'ellipse par une affinité orthogonale d'axe (BB') et de rapport $\pm\frac{a}{b}$.

c

L'hyperbole

Définition :

Soit F et F' deux points du plan tels que $FF' = 2c$, c réel positif. L'hyperbole de **foyers** F et F' est l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$, a réel donné et a < c. 2c s'appelle la **distance focale**



Axes de symétrie

Comme dans le cas de l'ellipse on montre que la droite (FF') ainsi que la médiatrice du segment $[FF']$ sont axes de symétrie. On dit que la droite (FF') est **l'axe focal** de l'hyperbole. Bien sur l'intersection de ces deux axes est centre de symétrie. On dit que c'est le **centre** de l'hyperbole. Enfin l'intersectioon de la droite (FF') avec l'hyperbole consiste en deux points dits **sommets** de l'hyperbole.

Construction point par point

L'algorithme est le suivant :

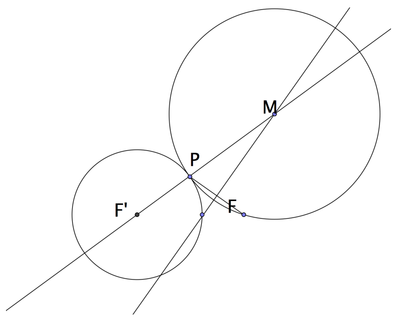
Tracer un cercle (C) de centre F' de rayon 2a

Tracer la droite $(F'P)$ où P est un point du cercle

Tracer la médiatrice du segment $[FP]$ qui coupe en un point M la droite $(F'P)$. M est un point de l'hyperbole. (On verra plus bas que le point P ne peut pas être choisi n'importe comment)

Justification : Supposons que M soit un point de l'hyperbole. On a $F'P = |MF' - MF| = 2a$. Donc P appartient au cercle de centre M de rayon 2a. Ce cercle est tangent en P au cecle (C).

Réciproquement Soit le cercle (C) et un point F extérieur à (C). Si M est le centre d'un cercle passant par F et tangent à (C) en P. Ce point M est extérieur au segment $[F'P]$ donc $|MF - MF'| = |MP - MF'| = PF' = 2a$. Et donc M est sur l'hyperbole.



On en déduit une nouvelle définition de l'hyperbole :

Soit deux points F et F' et a un réel positif. L'hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des centres des cercles, extérieurs au cercle de centre F' et de rayon 2a, et tangents à ce cercle et passant par le point F.

Le cercle de centre F' et de rayon 2a est dit **cercle directeur** relatif au foyer F' et sera noté (F').

Asymptotes à l'hyperbole

Le but est de montrer qu'il existe une droite (D) telle que si M est un point de l'hyperbole la distance de M à (D) tende vers 0 si M s'éloigne indéfiniment sur l'hyperbole. Bien entendu comme l'hyperbole posséde deux branches on aura deux asymptotes.

Soit donc une hyperbole de foyers F et F' et (C) son cercle directeur relatif au foyer F'. Considërons les tangentes menées du foyer F au cercle (C) et ω, ω' les points de tangence.

Remarquons que la construction par point est prise en défaut si on prend la médiatrice de $[F\omega]$ puisque $(F\omega)$ et cette médiatrice sonr paralélles. Cependant la droite $(F\omega)$ coupe le cercle (M) en E. Considérons la médiatrice de $[FE]$. La droite $(F\omega)$ coupe la tangente en P à (C) en$I$ et la médiatrice de $[FE]$ en J. Si donc m est le projeté orthogonal de M sur $(F\omega)$ mJ est la distance de M à la médiatrice de $[FE]$.

On a $\overrightarrow{F\omega} = 1/2\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FJ} = 1/2\overrightarrow{F\omega}$ donc $\overrightarrow{mJ} = 1/2\overrightarrow{E\omega}$.

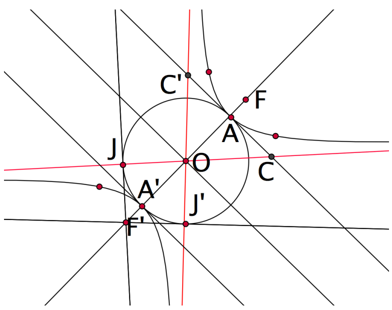
Lorsque P tends vers ω le point M s'éloigne indéfiniment sur l'hyperbole. et le point I tend vers ω. Or $I\omega^2 = IE.IF$ car I appartient à l'axe radical des deux cercles (confère les annexes). Donc $IE = \dfrac{I\omega^2}{IF}$ tends vers 0 si $I\omega$ tends vers 0.Ainsi $E \rightarrow \omega \Rightarrow E\omega \rightarrow 0 \Rightarrow mJ \rightarrow 0 \Rightarrow MH \rightarrow 0$.

La médiatrice de FE est donc asymptote à l'hyperbole. L'autre asymptote est obtenue en considérant l'autre tangente issue de F au cercle (C).

Construction et angles des asymptotes

Dans l'homothétie de centre F' et de rapport $1/2$ le cercle directeur (F') se transforme en le cecle de centre O, centre de l'hyperbole, et de diamètre $[AA']$, les deux sommets de l(hyperbole. Ce cercle est dit **cercle principal** .

Les asymptotes sont alors les droites (OJ) et (OJ') où J et J' sont les points de tangence avec le cercle principal des tangentes à ce cercle issues de F. (OJ) et (OJ') recoupent en C et C' a tangente en A. Les triangles OAC et OJF sont égaux. Posons $AC = b$, n a alors $c^2 = a^2 + b^2$. En posant $\dfrac{c}{a} = e$ on obtient $\widehat{AOC} = \alpha$ et $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{e}$. e est dit **excentricité** de l'hyperbole. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ on dit que l'hyperbole est **équilatère** auquel cas $e = \sqrt{2}$. Une section spéciale est consacrée à ce cas plus loin



Exercices sur l'hyperbole

Exercice 1

Soit (H) une hyperbole variable passant par deux points fixes A et B et dont l'un des foyers F est fixe. Si F' est l'autre foyer trouver l'ensemble des points F'.

Exercice 2

Soit un cercle fixe (C) de centre O et de rayon R et un point A extérieur au cercle. Trouver l'ensemble des centres M des cercles (ω) passant par A et coupant le cercle (C).

Tangente à l'hyperbole

Raappelons rapidement ce que nous savons :

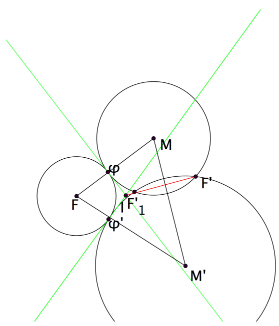
L"hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des centres des cercles (M) extérieurs au cercle de centreF' de rayon 2a, F', et (M) tangent à (F') passant par F.

Existence d'une tangente en un point

Nous devons montrer que si M et M' sont deux points de la même branche de l'hyperbole la sécante (MM') tends vers une position limite lorsque M' tends vers le point M en se déplaçant sur l'hyperbole.

Les deux points M et M' sont les centres des cercles (M) et (M') passant par F' et tangents au cercle (F) en ϕ et ϕ'. Les deux cercles $M)$ et (M') ont le point F_1', symétrique de F' par rapport à (MM'). La droite $(F'F_1')$ est l'axe radical des cercles (M) et (M')

Les tangentes en ϕ et ϕ' au cercle (F) sont les axes radicaux des couples respectifs de cercles (F) et (M) et (F) et (M').. Ces axes se coupent en I, qui est le centre radical des trois cercles



Lorsque le point M' tends vers le point M, le vecteur $\overrightarrow{FM'}$ tends vers le vecteur $\overrightarrow{FM}$ et le vecteur $\overrightarrow{F\phi'}$ tends vers le vecteur $\overrightarrow{F\phi}$. Donc (FI), bissectrice de l'angle $\overrightarrow{F\phi}, \overrightarrow{F\phi'}$ tends vers la droite $(F\phi)$ et par suite I tend vers ϕ. Par suite (MM'), perpendiculaire à $(F'I)$, tend vers la position limite, à savoir la prependiculaire à $(F'\phi)$ issue de M.

Exercice

Soit deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O' et de rayons R et R' $(R > R')$. On considère les cercles (ω) tangents aux cercles (C) et (C') en T et T'.

a) Montrer que la droite (TT') passe par deux points fixes. On pensera à des centres d'homothéties.

b) Les centres des cercles (ω) se trouvent soit sur une hyperbole soit sur une ellipse.

Equation de l'hyperbole

ConsidŐrons un repŔre orthonormŐ direct dont l'origine est le point O, centre de symŐtrie de lÓellipse et lÕaxe Ox le grand axe focale. Dans ce repŔre les deux foyers

F et F' ont pour coordonnÕes respectives (c, 0) et (?c, 0). Reste donc Ĺ exprimer que lÕhyperbole est lÕensemble des

points M de coordonnées (x,y) tels que $|MF - MF| = 2a$. On note par r la distance MF, r' la distance MF' et par 2c la distance focale , donc la distance entre les deux foyers. Ceci nous donne les équations successives suivantes :

$(r - r' - 2a = 0)(r - r' + 2a) = 0$. En considérant la fonction suivante du point M : P = (r + r' +2a)(r + r' - 2a)(r - r' +2a)(r - r' - 2a) on a donc $P = 0$ soit (confére le calcul de P dans le paragraphe sur l'ellipse)

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

en posant $b^2 = c^2 - a^2$.

On en tire les équations des asymptotes :

L'hyperbole d'équation $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ admet deux asymptotes qui ont pour équations : $y = \pm\frac{b}{a}x$. Il suffit de faire le développement asymptotique de $x \to \pm b(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1})$

Ceci nous donne une nouvelle forme déquation de l'hyperbole en prenant comme repère les asymptotes : à savoir $\mathbf{XY = k}$ où k est une constante. Il suffit de prendre le changement de repère $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \to (X + Y, X - Y)$

Cas de l'hyperbole équilatère

Rappelons qu'il s'agit du cas où l'excentricité $e = \sqrt{2}$. Dans ce cas les asymptotes sont orthogonales.Une autre propriété nous donne la définition suivante :

L'hyperbole équilatère est l'ensemble des points de contacts des tangentes aux cercles passant par A et A', perpendiculaires à (AA').

justification : Elle repose sur la caractérisation d'une tangente à un cercle utilisant la puissance d'un point (cf l'annexe).

En effet si M est un pooint de (H), hyperboole équilatère, et H son projeté orthogonal sur l'axe focal alors $\overline{HM^2} = y^2 = (x + a)(x - a) = \overline{HA}.\overline{H'A'}$.

Définition par foyer et directrice

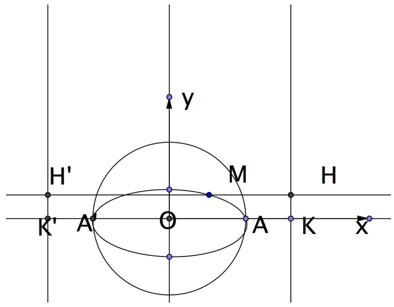
Rappelons que l'équation d'une conique à centre est donné par $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$. On en tire le calcul des rayons focaux :

Si $r = MF$ et $r' = MF'$ alors $r'^2 - r^2 = 4cx$, x étant l'abscisse de M dans le repère formé par les axes de la conique. (cf page 9)

Donc dans le cas de l'ellipse comme $r + r' = 2a$ on a $r = |a - \frac{cx}{a}|$

et dans le cas de l'hyperbole comme $r - r' = 2a$ on a $r = |a + \frac{cx}{a}|$.

Soit donc (C) une conique à centre. M un point de (C) de coordonnées (x, y) dans le repère formé par les axes de (C) et F, F' les foyers.



On a $MF = |a - \frac{cx}{a}| = \frac{c}{a}|\frac{a^2}{c} - x|$. Or $|\frac{a^2}{c} - x|$ est la distance de M à la droite (D) d'équation $X = \frac{a^2}{c}$. Donc en se souvenant que l'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et en désignant par H la projection de M sur (D) on a $\frac{MF}{MH} = e$.

Soit K la projection de M sur (AA'), $\overline{OK} = \frac{a^2}{c}$ donc $\overline{OK}.\overline{OF} = OA^2 - OA'^2$ ce qui montre que (D) est la polaire de F par rapport au cercle principal de la conique. On dit que (D) est la **directice** de la conique associée au foyer F.

Bien entendu on a la notion duale de directrice de la conique relativement au foyer F'.

Etudions la situation inverse c'est à dire : Soit deux points F et F' tels que $FF' = 2c$. Considérons une droite (D) telle que si$H$ est la projection orthogonale de M sur (D) $\frac{MF}{MH} = e$. Si (x, y) sont les coordonnées de M on a donc après calcul $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ soit l'équation d'une conique. Si $e < 1$ alors on a une ellipse et si $e > 1$ une hyperbole.

Exercices sur l'ensemble des points tels que $\frac{MF}{MH} = e$

Exercice 1 :

On munit le plan d'un repère orthonormé. Soit C le point de coordoonnées $(c, 0)$ et la droite (D) d'équation $x = d$ (c et d positifs différents). Une droite variable (Δ) passant par C coupe (D) en H et l'axe Oy en ω.

1) Pour une droite (Δ) fixée trouver l'ensemble des points Ω tels que $\frac{PC}{PH} = \sqrt{\frac{c}{d}}$.

2) Trouver l'ensemble des points M et M', points où la perpendiculaire en H à (D) coupe Ω.

<u>Les annexes</u>

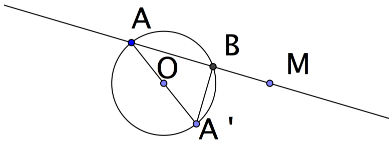
Puissance d'un point par rapport à un cercle

On peut exprimer le produit scalaire de deux vecteurs de la facon suivante :

Soit les deux vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MA'}$ et soit B le projeté orthogonal de A' sur la droite (MA) . Si O est le milieu de $[AA']$, alors on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = MO^2 - OA^2$ Cette remarque va nous amener à la définition suivante :

Soit un cercle (C), de centre O et de rayon R et un point M tel que on ait une sécante MAB menée de M au cercle (C). Soit A' le point diamétralement opposé à A alors $\overline{MA}.\overline{MB} = MO^2 - OA^2$. Ce résultat est indépendant de la sécante issue de M. Ce produit est dit **puissance de M par rapport à** (C) . On le notera $C(M)$.

justification :

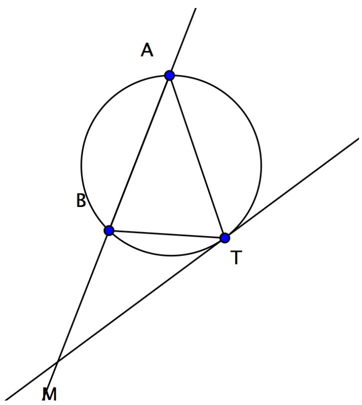


$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overline{MA}.\overline{MB}$ si B est le projeté orthoogonal de A' sur (MA). Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}) = MO^2 - OA^2$. En posant $d = OM$ la puissance de M par rapport au cercle (C) est donc $d^2 - R^2$ qui ne dépend donc pas de la sécante.

Notons que la puissance de M est positive si M est extérieur au cercle et négative sino. Enfin si M appartient au cercle la puissance est nulle.

On a la proposition suivante :

Si les trois points A, B, T sont alignés et M est un point de la droite (AB) tels que $\overline{MA}.\overline{MB} = MT^2$, la droite (MT) est tangente en T au cercle circonscrit au triangle ABT.



Deux exercices sur les puissances d'un point :

Exercice 1 :

Affinité

Définition :

Soit une droie (D), une direction $\Delta)$ non paralélle à (D) et k un réel non nul.

Une affinité **d'axe** (D)**, de direction** (Δ) **et de rapport** k la transformation qui à tout poiint M associe le pooint M' tel que $\overrightarrow{mM'} = k\overrightarrow{mM}$, m étant la projection de M sur la droite (D) parallélement à (Δ).

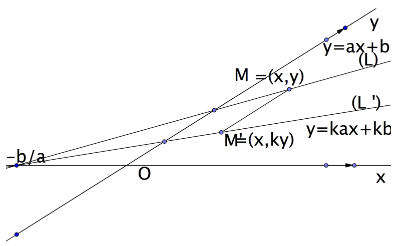
C'est une transformation bijective dont l'inverse est l'affinité de même axe et de même direction et de rapport $1/k$.

Dans la ces où l'axe et la direction sont perpendiculaires on dira que l'affinité est orthogonale.

Transformé d'une droite

Le transformé d'une droite (L) est une droite (L') dont le coefficient directeur est multiplié par k et coupant (éventuellement) l'axe au même point que (L).

Considérons le repère Oxy ci dessous. Dans ce repère soir $y = ax + b$ *l'équation de* (L)*. Un pont de coordonnées* (x, y) *est transformé par l'affinité d'axe* Ox *de direction* Oy *et de rapport* k *en le point de coordonnées* (x, ky) *donc* (L) *est transformé en* (L') *d'équation* $y = kax + kb$ *d'où le résultat.*



Exercice 1

Axe radical de deux cercles

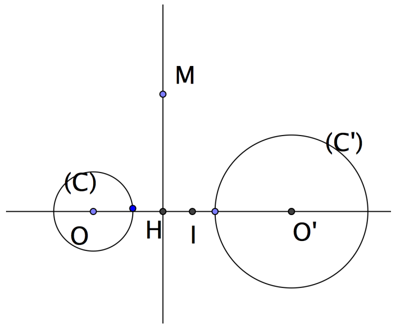
Rappelons d'abord la propriété suivante d'un triangle :

Soit ABC un triangle et I le milieu de$[B, C]$. Si H est la projection orthogonale de A sur $[B, C]$ aloors $AB^2 - AC^2 = 2.\overline{IB}.\overline{IC}$.

C'est l'ensemble des points M qui ont la même puissance par rapport aux deux cercles

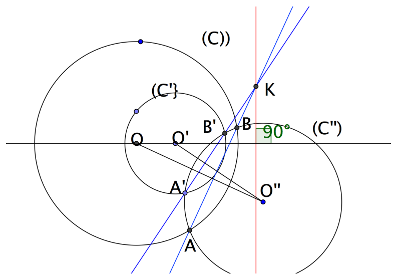
cercles.Précisons en montrant qu'il s'agit d'une droite (D).

Pour qu'un point M ait même puissance par rapport aux deux cercle (C) et $(C)'$ de rayon R et R' il faut et il suffit que $MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$. Si H est la projection orthogonale de M sur la droite (OO') et I est le milieu du segment $[OO']$ on a $MO^2 - MO'^2 = 2.\overline{OO'}.\overline{IH}$. Donc M a même puissance par rapport aux deux cercles si et seulement si M appartient a la droite perpendiculaire à (OO') en H tel que $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$.



Construction de l'axe radical

deux cas se présentent : **Soit les deux cercles ont au moins un point en commun** A.Ce point a alors même puissance par rapport aux deux cercles à savoir la puissance nulle donc l'axe radicale est la perpendiculaire à (OO') mené par A.**soit les deux cercles n'ont aucun point en commun**



Considérons un cercle (C') coupant (C) en A et B et (C') en A' et B', dont le centre ne soit pas aligné avec O et O'. Ce point K appartient à $(A'B')$, axe radical de (C') et $(C")$ et à (AB) axe radical de (C) et (C'') donc l'axe radical de (C) et (C') est la perpendiculaire passant par K à (OO').

Centre radical de trois cercles

Si on considère trois cercles dont les centres ne sont pas alignés les axes radicaux de ces trois cercles concourent en un point dit centre radical.